Université Nazi BONI

UFR/ST

Prof : COULIBALY Lassina

Année académique 2020-2021

Filière : MPI L2-S3

Date : 12/02/2022

Durée : 3h

Evaluation d'informatique 3

Session de rattrapage

Documents non autorisés

Aucun appareil électronique autorisé

L'objectif de cet exercice est de concevoir une liste chainée bidirectionnelle de vente d'articles. Une liste chainée bidirectionnelle est composée de plusieurs nœuds et de deux têtes L et P où L et P sont des pointeurs respectifs sur les nœuds à l'extrémités de la liste.

NB :

- **Le précédent de L est null et le suivant de P est null.**
- **Tout parcourt de la liste se fera de P vers L.**

1. Sachant qu'un article est défini par un code de type entier , un libellé de type chaine de caractères et stock de type entier, proposez, en algorithmique puis en langage C, une structure de données avec l'alias « Article » qui modélise un article.

2. Sachant qu'une vente contient une variable de type Article, une quantité de type entier, l'adresse de la vente précédente et l'adresse de la vente suivante, proposez, en algorithmique puis en langage C, une structure de données avec l'alias « Vente » qui modélise une vente.

3. Sachant que les deux têtes de la liste (L et P) sont des variables de type Vente, proposez, en algorithmique puis en langage C une structure de données avec l'alias « Listevente » dont les seules variables sont L et P et qui correspond à une liste bidirectionnelle de vente.

4. Proposer en langage C une fonction nommée « count » qui prend en paramètre une liste bidirectionnelle de vente (Listevente), la parcourt en comptant chaque nœud puis retourne le nombre de ventes. Prototype de « count » : **int count(Listevente *liste)** ;

5. Soit n le nombre total de ventes d'une liste et m la partie entière de la division de n par 2. Sachant que la vente correspondant au milieu d'une liste de vente est la vente à la position m dans la liste par rapport à la tête P, proposer en langage C une fonction

Scanned with CamScanner

nommée « milieuListevente » qui prend en paramètre une liste bidirectionnelle de vente et qui retourne l'adresse de vente milieu de la lise. Prototype de « milieuListevente » :

Vente* milieuListevente(Listevente *liste) ;

NB : Appeler la fonction « count » pour avoir n.

6. Proposer en langage C une fonction nommée « insertion-milieu » qui insère une vente dans la liste après la vente milieu (par rapport à P) et qui retourne la liste. Prototype de « insertion-milieu» :
   Listevente* insertion-milieu(Listevente *liste, Vente *v);
   NB : Appeler la fonction « milieuListevente» pour avoir l'adresse de la vente milieu.

7. Proposer en langage C une fonction nommée « afficher » qui prend en paramètre une liste bidirectionnelle de vente (Listevente), la parcourt et affiche le code de l'article, son libellé et la quantité vendue de chaque vente de la liste. Prototype de « afficher »: **void afficher(Listevente *liste)** ;

Bonne inspiration !!

Scanned with CamScanner

Université NAZI BONI — **UFR/ST**

Session de rattrapage : *Analyse 3* — Classe : **MPI2**

Date : Novembre 2021 — Durée : 3 heures

Documents non autorisés

NB: *Bien lire l'énoncé avant de commencer. Compte sera tenu de la netteté de la copie ainsi que la rédaction. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le «ping-pong» est fortement déconseillé.*

Exercice 1 **(7 points)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{y}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. On pose $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathcal{U}$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point $(0, y_0)$ où $y_0 \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que les dérivées partielles sont continues au point $(0,0)$. Que peut-on en déduire sur la différentiabilité de f en ce point?
4. Soit $y_0 \neq 0$.
   (a) Etudier la continuité des dérivées partielles de f en $(0, y_0)$.
   (b) Montrer que f est différentiable en $(0, y_0)$.

Exercice 2 **(6 points)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = x^3(a-x) - b^2y^2$, avec $a, b > 0$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(a, 0)$.

On considère maintenant la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ définie par la condition $f(x,y) = 0$.

3. Représenter graphiquement Γ en déterminant les points de $\mathbb{R}^2$ sur les lesquels la tangente à la tangente à la courbe est soit horizontale soit verticale.
4. Déterminer le plus grand ensemble de points de Γ pour les lesquels le théorème des fonctions implicites s'applique.
5. Vérifier que l'aire de la figure délimitée par Γ vaut $\dfrac{\pi a^3}{8b}$.

Exercice 3 **(7 points)**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\, dx$.

1. Démontrer que l'ensemble de définition D_F de F est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $u \geq 0$, $1 - \cos(u) \leq \frac{1}{2}u^2$. Pour tout $I \subset \mathbb{R}$, on note $\chi_{\{x \in I\}} = 1$ si $x \in I$ et 0 sinon. Montrer que $\left|\dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2}t^2 \chi_{\{0<x<1\}} + 2x^{-2}\chi_{\{x \geq 1\}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $|F(t)| \leq (\frac{1}{2}t^2 + 2)e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\, dt$ est absolument convergente.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}(1-\cos(xt))\, dt$. En utilisant le théorème de Fubini, en déduire que $\displaystyle\int_0^\infty F(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$.
5. En utilisant une intégration par parties et un changement de variable dans F, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

Scanned with CamScanner

Université NAZI BONI — UFR/SEA

Contrôle : *Analyse 3* — Classe : **MPI2**

Date : Décembre 2022 — Durée : 3 heures

Documents non autorisés

NB: *Bien lire l'énoncé avant de commencer. Compte sera tenu de la netteté de la copie ainsi que la rédaction. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le «ping-pong» est fortement déconseillé.*

Questions de cours et applications (9 points)

1. Soit E un espace vectoriel normé.

1.1 Donner la défintion d'une norme sur E.

1.2 Définir un ensemble ouvert et un ensemble fermé de E.

1.3 Donner une caractérisation d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé de E.

1.4 Donner le lien entre un espace métrique et un espace vectoriel normé.

2. Dans l'espace vectoriel normé $E = \mathbb{R}$, on pose $A = \mathbb{Z}$ et $B = \{n - \frac{1}{2n} / n \in \mathbb{N}^*\}$ Montrer que A et B sont des fermés et que $A + B$ n'est pas fermé.

3. Discuter en fonction du paramètre α, de la continuité et de la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|xyz|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^\alpha (y+1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}} \text{ si } (x,y) \neq (1,-1) \\ 1 \text{ si } (x,y) = (1,-1) \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = x^3(a-x) - b^2y^2$, avec $a, b > 0$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(a, 0)$.

On considère maintenant la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ définie par la condition $f(x,y) = 0$.

3. Représenter graphiquement Γ en déterminant les points de $\mathbb{R}^2$ sur les lesquels la tangente à la tangente à la courbe est soit horizontale soit verticale.
4. Déterminer le plus grand ensemble de points de Γ pour les lesquels le théorème des fonctions implicites s'applique.
5. Vérifier que l'aire de la figure délimitée par Γ vaut $\dfrac{\pi a^3}{8b}$.

Exercice 4 (6 points)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F où $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$.

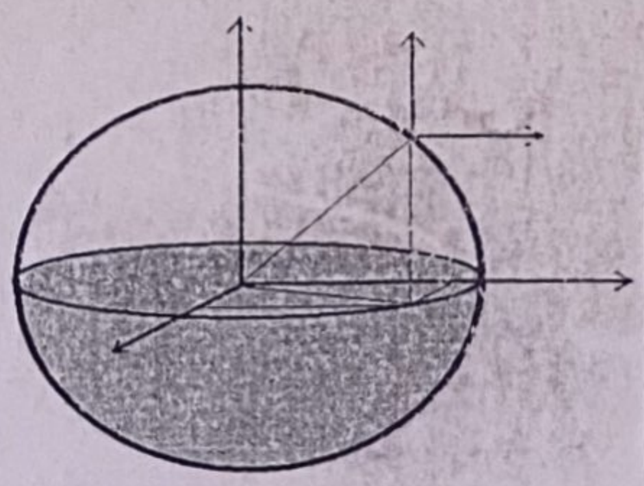
1. Montrer que F est d´efinie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $F(0)$?
2. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe C1 sur R et donner l'expression de $F'(x)$. Que vaut $F'(0)$?
4. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $F''(x)$.
5. En déduire que F est solution de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = f(x)$ avec la condition initiale $y(0) = y'(0) = 0$.
6. Dans le cas où $f(x) = \cos(x)$ résoudre l'équation différentielle précédente et en déduire F. Retrouver ce résultat en utilisant directement la formule intégrale de F.

"En mathématiques, "évident" est le mot le plus dangereux" !!!

Scanned with CamScanner

UPB/UFR-ST

MPI2-L2-S3



Année Academique

2019-2020

Rattrapage de mécanique (2h30)

Exercice 1 *(10pts)*

On considère le triangle rectangle homogène plein ABC d'épaisseur négligeable. On pose $\overrightarrow{AB}=2a\vec{x}$ et $\overrightarrow{BC}=2b\vec{y}$. On demande de déterminer :

1- les coordonnées dans le repère $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ du centre d'inertie G du triangle ABC. 2pts

2- la matrice d'inertie de ce triangle en A sur la base $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$), 4pts

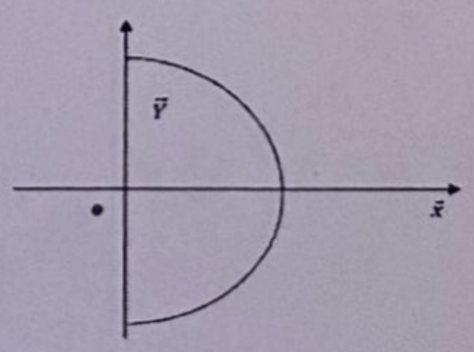
3- déduire la matrice d'inertie en G sur la base $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$), 4pts

.

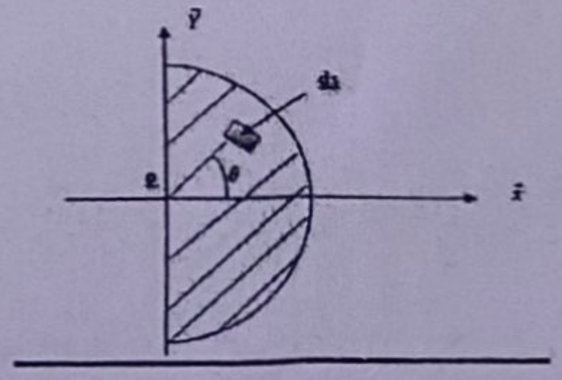
Exercice 2 *(10pts)*

Déterminer la matrice principale et centrale d'inertie des solides homogènes suivants:

a. Demi cercle de masse M et de rayon R.



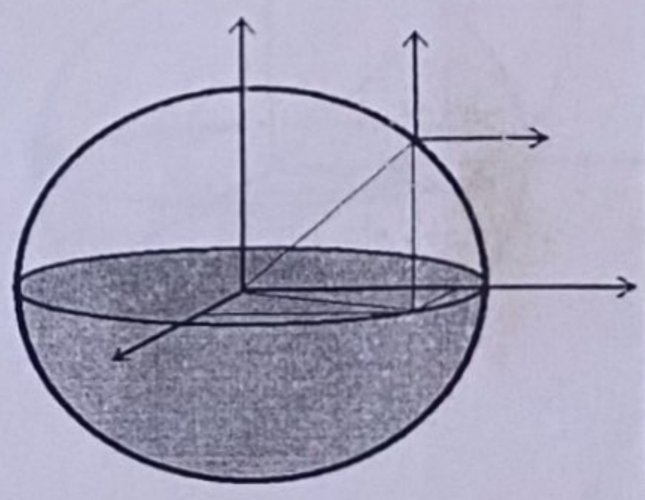
b. Demi disque de masse M et de rayon R.



Scanned with CamScanner

UPB/UFR-ST

MPI2-L2-S3



Année Academique

2019-2020

Rattrapage de mécanique (2h30)

Exercice 1 *(10pts)*

On considère le triangle rectangle homogène plein ABC d'épaisseur négligeable. On pose $\overrightarrow{AB}=2a\vec{x}$ et $\overrightarrow{BC}=2b\vec{y}$. On demande de déterminer :

1- les coordonnées dans le repère $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ du centre d'inertie G du triangle ABC. 2pts

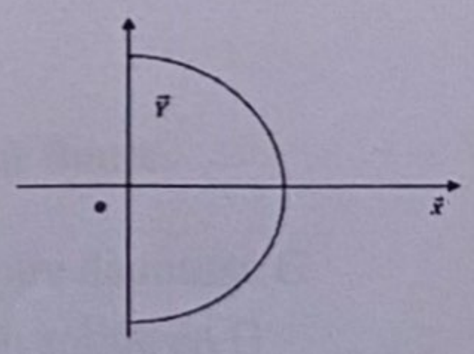
2- la matrice d'inertie de ce triangle en A sur la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, 4pts

3- déduire la matrice d'inertie en G sur la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, 4pts

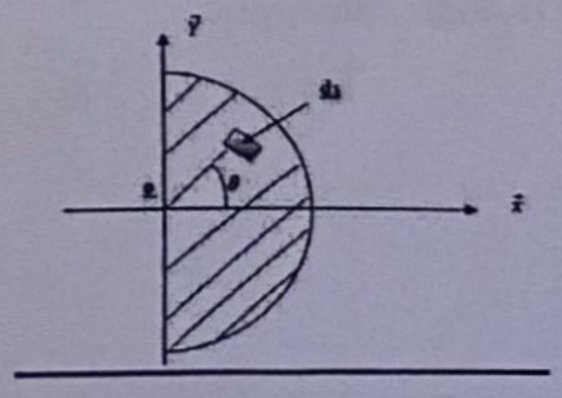
Exercice 2 *(10pts)*

Déterminer la matrice principale et centrale d'inertie des solides homogènes suivants:

a. Demi cercle de masse M et de rayon R.

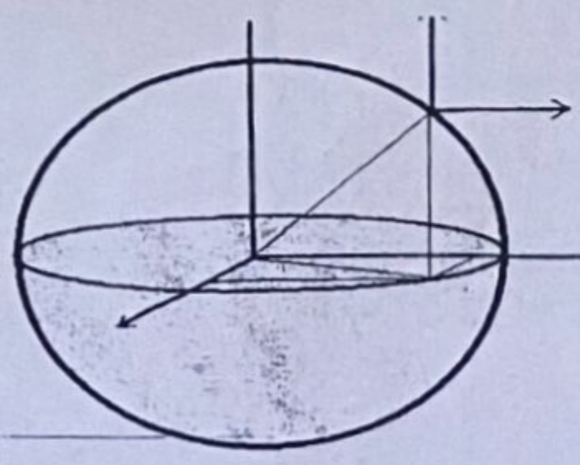


b. Demi disque de masse M et de rayon R.



Scanned with CamScanner

UPB/UFR-ST
MPI2-L2-S3



Année Academique
2021-2022

Contrôle N°1 de mécanique (2h30)

NB1) Tout résultat « plaqué » sans calculs détaillés, concis et clairs sera sanctionné de la note zéro (0), même si le résultat est juste

NB2) les résultats seront exprimés en fonction des paramètres de l'énoncé, notamment la masse m. tout autre paramètre sera considéré inconnu d'où la note 0

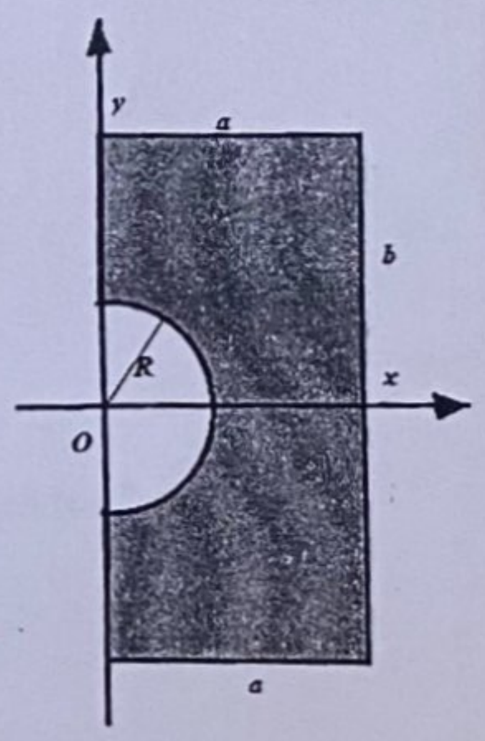
Exercice 1 *(4pts)*

Une plaque triangulaire OAB de masse m repartie uniformement sur sa surface est telle que $\overrightarrow{OA} = b\vec{j}$ et $\overrightarrow{0B} = a\vec{\imath}$ avec a et b sont des constantes positives. Déterminer la position de son centre de gravité.

Exercice 2 *(2+2=4pts)*

En utilisant les theorèmes de Guldin, déterminer :

1) la surface d'une demi-sphère de rayon R
2) le volume d'une demi-sphère de rayon R



Exercice 3 *(2+1.5+1.5=5pts)*

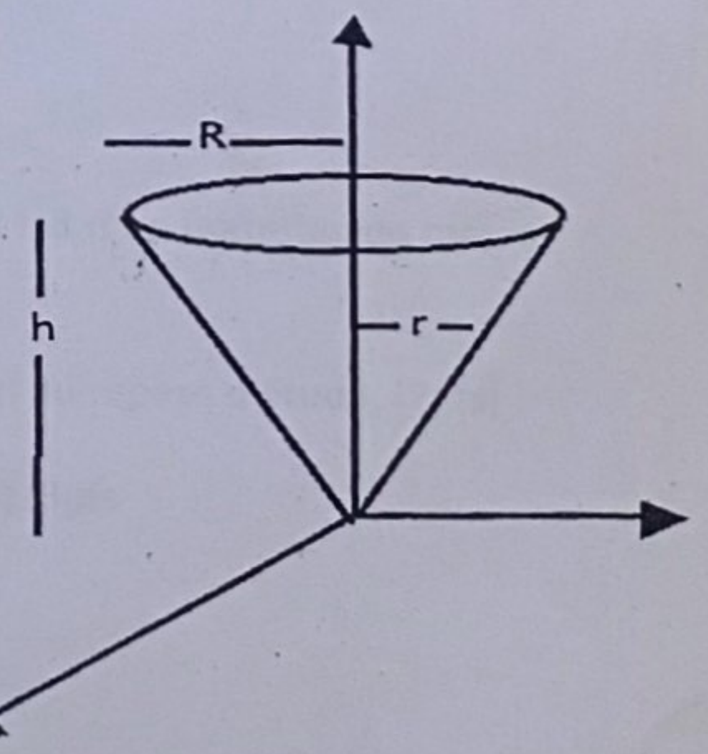
On considère une plaque rectangulaire axb d'épaisseur négligeable et de masse m repartie uniformément sur sa surface. Elle est évidée (au centre d'un coté) d'un demi-trou circulaire de rayon R confère figure.

1) Calculer la position du centre de gravité de ce solide
2) Calculer les moments d'inerties autour des axes (ox) et (oy)

Exercice 4 *(2+5=7pts)*

On considère un solide conique R, h. Voir figure.

1) Déterminer la position de son centre de masse G
2) Déterminer la matrice d'inertie du solide en G exprimée dans $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Scanned with CamScanner

Université Nazi Boni **Année Académique 2022-2022**

UFR-SEA-MPI2

Contrôle N°1 de mécanique du solide (2h00)

NB : Tout résultat « plaqué » sans calcul détaillés, concis et claire sera sanctionné de la note zéro (0), même si le résultat est juste

Exercice N°1(6pts)

Démontrer les théorèmes de Guldin

1) L'aire de la zone engendrée par une courbe plane homogène C en tournant autour d'une droite situé dans son plan et ne traversant pas, est égale au produit de la longueur de cette courbe par celle du cercle engendré par son centre d'inertie. (2pts)
2) Le volume engendré par une plaque plane homogène tournant autour d'une droite située dans son plan et ne le traversant pas est égal au produit de l'air de cette plaque par la longueur du cercle engendré par son centre d'inertie. (2pts)

3) Application :

a) Centre d'inertie d'une demi-circonférence, (1pt)

b) Centre d'inertie d'un quart de disque. (1pt)

Exercice N°2(6pts)

On considère une plaque rigide S, homogène, de masse spécifique σ qui a la forme d'un triangle OAB rectangle en O, origine d'un repère R(O, i, k). On a $\overrightarrow{OA} = c\vec{y}$; $\overrightarrow{OB} = b\vec{z}$

A et b € $\mathbb{R}$ et $b = c\sqrt{2}$

1) Déterminer l'équation de la droite (AB). (1pt)
2) Calculer la masse m de la plaque en fonction de σ et de c.(1pt)
3) Trouver les coordonnées du centre d'inertie G de S.(1pt)
4) Trouver la matrice d'inertie en o. (3pts)

Exercice N°3 (7pts)

On considère dans le repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un cylindre homogène de rayon R fait d'un matériau de masse volumique ρ. Soit m la masse totale du cylindre. (2pts)

1) Déterminer la position du centre d'inertie G du cylindre par rapport au repère d'étude. (2pts)

2) Déterminer la matrice d'inertie en o par rapport à la base ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) ; (3pts

3) En déduire la matrice d'inertie en G sur la base ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) . (2pts)

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 **Décembre 2022**

Devoir d'algèbre III (Durée : 3h)

Exercice 1. (4pts)

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice de projection et φ l'application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = PM + MP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 2. (4pts)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice k.

1. Montrez que 0 est la valeur propre seule de f.
2. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Démontrer que les vecteurs x, $f(x)$, $f^2(x)$, . . . , $f^{p-1}(x)$ sont linéairement indépendants. En déduire que $p \leq n$.
3. Démontrer que f est nilpotent d'ordre n si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $A = (a_{ij})$ de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{ij} = 0$ si $j \neq i + 1$ et $a_{i,i+1} = 1$.

Exercice 3. (6pts)

Soit M la matrice suivante et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M n'est pas diagonalisale mais trigonalisable.
2. Déterminer la décomposition spectrale de M.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la forme de Jordan de M.
4. Résoudre le système différentiel suivant : $X'(t) = MX(t)$ avec $X(0) = {}^t(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 4. (6pts)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies et.

1. On considère les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^3$ définies par : $\varphi_1(x, y, z) = x + y - z$, $\varphi_2(x, y, z) = -x - 2y + 4z$ et $\varphi_3(x, y, z) = 2x - 3y + 2z$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base préduale de $\mathcal{B}^*$.
   (b) Exprimer dans la base $\mathcal{B}^*$ la forme linéaire exprimée dans $\mathcal{B}_0^*$ par $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Montrer que $Im({}^t f) = Ker(f)^\perp$ et $Ker({}^t f) = Im(f)^\perp$
   (b) En déduire que f est injective si et seulement si ${}^t f$ est surjective.

Scanned with CamScanner

Date : 03 /02/ 2022 ..... Academic year : *2021 - 2022*

Last Name : [redacted] ..... UNB / UFR- SEA / MPI – *L 2 – S3*

First Name(s): [redacted] ..... Signature [redacted]

Date / Place of birth: ..... R N [redacted]

Mark : 07 / 20 Appreciation: Poor ..... Auguste Pierre BAZONGO

7

Knight of the Merit Order

END - OF – SEMESTER 3 ENGLISH TEST (55 mn)

I. READING COMPREHENSION (3 / 5)

According to the text below,

1- Calculus is one of the most complex branch of mathematics. True ● / False O

2- Algebra and Calculus help solve equations. True ● / False O

3- Differential calculus is a major branch of Geometry and Algebra. True O / False ●

4- Mathematical analysis is an advanced form of Calculus. True O / False ●

5. Calculus alone can solve problems in science, economics, and engineering. True ● / False O

Text: Calculus

Calculus (Latin, calculus, a small stone used for counting) is a branch in mathematics focused on limits, functions, derivatives, integrals, and infinite series. This subject constitutes a major part of modern mathematics education. It has two major branches, differential calculus and integral calculus, which are related by the fundamental theorem of calculus. Calculus is the study of change, in the same way that geometry is the study of shape and algebra is the study of operations and their application to solving equations. A course in calculus is a gateway to other, more advanced courses in mathematics devoted to the study of functions and limits, broadly called mathematical analysis. Calculus has widespread applications in science, economics, and engineering and can solve many problems for which algebra alone is insufficient.

Les réponses surchargées sont frappées de nullité.

Scanned with CamScanner

II. LISTENING COMPREHENSION (3 / 5)

According to the video "the map of mathematics"

1- Only humans started counting at the beginning. True ● / False O

2- Persians wrote the first book on algebra but *zero* came from Greece. True O / False ●

3- Negative numbers were invented in India and equations in China. True O / False ●

4- Pure Mathematics help solve real world problems. True O / False ●

5- Calculus is part of applied mathematics. True ● / False O

III. WRITING

A. Re-order theses sentences using 1,2,3, ...10 to obtain a coherent paragraph. (1 / 10)

a 2. It consists in burning fuels to generate energy.

b 9. We use two main sources of energy in our daily life.

c 4. Solar energy, wind power and other sources like geothermal energy are examples of the kind ; so this source is especially abundant and less expensive.

d 3. It consists in using panels , towers or other types of instalations to generate energy .

e 7. It is those two main sources of energy that we use in our daily life.

f 6. In the second position stands renewable energies.

g 5. In the first position stands fossil fuel energies.

h 1. In Burkina Faso, SONABEL uses this source to produce more than 90% of the electricity the country needs.

i 10. That is why in countries where people use those sources, electricity is not so expensive.

j 8. That is the reason why electricity is very expensive in this country.

Les réponses surchargées sont frappées de nullité.

Scanned with CamScanner

CUB/ MPCI

MPCI / L2S3

Université Nazi Boni

Mars 2023

Epreuve de Thermodynamique physique (Deuxième *Session)*

Durée : 02 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.

Cours (06 points)

1. Parmi les grandeurs thermodynamiques suivantes : **Chaleur, enthalpie, entropie, travail, énergie interne, citer :**
   - Celles qui sont des fonctions d'état
   - Celles qui ne sont pas des fonctions d'état
2. Citer une insuffisance du premier principe corrigée par le second principe.
3. Répondre par Vrai ou Faux :
   a. La chaleur est une forme d'énergie qu'un système peut stocker.
   b. Le travail est une forme d'énergie qu'un système ne peut stocker.
   c. Un système fermé peut échanger de la matière mais pas de l'énergie.
   d. Il n'existe pas de machine motrice monotherme.
   e. Il peut exister des machines réceptrices monotherme.
   f. Selon l'inégalité de Clausius, on peut concevoir une machine ditherme qui prélève de la chaleur à deux sources, l'une froide et l'autre chaude.
4. Dessiner le cycle de Carnot dans un diagramme de Clapeyron.

Exercice 1 (04 points)

On maintient à 0°C l'une des deux soudures d'un thermocouple, et on porte l'autre soudure à différentes température. On mesure la force électromotrice E du thermocouple :

θ(°C)	0	50	100	200	400	500
$E\ (mV)$	0	4,5	8	12	8	0

1. Tracer la courbe $E = f(\theta)$ et montrer que E est de la forme :

$$E = a\theta + b\theta^2$$

et déterminer les coefficients a *et* b.

2. Déterminer la f.é.m E lors la température vaut 225°C.
3. On veut définir cette $f.é.m\ E$ pour définir une échelle linéaire centésimale t. Tracer $E = f(t)$ sur le même graphe que $E = f(\theta)$.

Scanned with CamScanner

Exercice 3 (10 points)

Soit une machine utilisant comme fluide l'air assimilé à un gaz parfait diatomique. Cette machine fonctionne réversiblement selon le cycle composé :

- d'une détente isobare $A \longrightarrow B$ telle que $A\ (P_0, V_0, T_0)$ et $B\ (P_0, 2V_0,\ T)$
- d'une compression isotherme $B \longrightarrow C$ qui ramène le gaz à son volume initial V_0
- d'un refroidissement isochore $C \longrightarrow A$.

1. Tracer le cycle de transformation dans un diagramme (P, V) et dans un diagramme (T, S).
2. Exprimer, en fonction de T_0, la température $\boldsymbol{T}$ à laquelle s'effectue la compression isotherme. En déduire l'expression de la pression maximale $\boldsymbol{P_C}$ atteinte.
3. Calculer, en fonction de P_0 et V_0, les travaux $W_{AB},\ W_{BC}\ et\ W_{CA}$ échangés par une mole de gaz.
4. Calculer, en fonction de P_0 et V_0, les quantités de chaleur $Q_{AB},\ Q_{BC}\ et\ Q_{CA}$ échangés par une mole de gaz.
5. En déduire le travail W_{cycle} et la quantité de chaleur Q_{cycle} échangés par le système au cours du cycle.
6. **Application numérique** : remplir le tableau ci-dessous avec les valeurs numériques.

Travail transféré				
Transformation	W_{AB}	W_{BC}	W_{CA}	W_{CYCLE}
Quantité (en Joules)				
Chaleur transférée				
Transformation	Q_{AB}	Q_{BC}	Q_{CA}	Q_{CYCLE}
Quantité (en Joules)				

Données :

$P_0 = 10^5\ Pa\ , V_0 = 0{,}025\ m^3$,

Gaz parfait	γ	C_v	C_p
monoatomique	5/3	$12{,}5\ J.mol^{-1}.K^{-1}$	$20{,}8 J.mol^{-1}.K^{-1}$
diatomique	7/5	$20{,}8 J.mol^{-1}.K^{-1}$	$29{,}1 J.mol^{-1}.K^{-1}$

Scanned with CamScanner

Université NAZI BONI — **UFR/SEA**

Session de rattrapage : *Analyse 3* — Classe : **MPI2**

Date : Mars 2023 — Durée : 3 heures

Documents non autorisés

NB: *Bien lire l'énoncé avant de commencer. Compte sera tenu de la netteté de la copie ainsi que la rédaction. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le «ping-pong» est fortement déconseillé.*

Exercice 1 **(7 points)**

On note $C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^0 sur $[0,1]$ et $C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. 1. Prouver que la fonction N_0 définie sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$ par: $N_0(f) = \max\{|f(x)|/x \in [0,1]\}$, est une norme sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

2. Prouver que la fonction N_1 définie sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$ par: $N_1(f) = \max\{N_0(f), N_0(f')\}$ est une norme sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

3. Pour tout entier naturel n, calculer la norme N_0 et la norme N_1 de la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \cos(2nx)$.

4. En déduire que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

5. On note d_1 la distance associée à la norme N_1 et d_0 la distance induite sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$ par la distance associée à la norme N_0. Prouver que si une suite d'éléments de $C^1([0,1],\mathbb{R})$ converge pour la distance d_1, elle convergera pour la distance d_0.

6. Prouver que la suite $\left(\frac{f_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge pour la distance d_0 mais pas pour la distance d_1.

Exercice 2 **(6 points)**

Soit

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

Pour tout $(x,y) \in T$, on pose

$$f(x,y) = xy(1-x-y).$$

1. Montrer que T est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il existe $(x_0,y_0) \in T$ tel que

$$f(x_0,y_0) = \max_{(x,y)\in T} f(x,y).$$

3. Justifier que $(x_0,y_0) \in \overset{\circ}{T}$.
4. Montrer que $x_0 = y_0 = \frac{1}{3}$.
5. Montrer que pour tout $(x,y) \in T$, $f(x,y) \leq \frac{1}{27}$.
6. Soient x,y,z des réels positifs ou nuls. Montrer que $(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+y+z}{3}$.

Exercice 3 **(7 points)**

Soit $F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,dt$.

1. Montrer que F n'est pas définie pour $|x| > 1$, puis qu'elle est définie sur $]-1,1[$et enfin en -1 et en 1.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $F(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,dt$.
3. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $F(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x\cos t) - \ln(1-x\cos t)}{\cos t}\,dt$. F est-elle paire ou impaire?
4. Montrer que pour tout $-1 < u < 1$, on a $\left|\frac{\ln(1+u)}{u}\right| \leq \frac{1}{1-|u|}$. En déduire F est continue sur $]-1,1[$.
5. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et préciser F'.
6. En utilisant un changement de variable judicieux, montrer que $F'(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. Déterminer $F(0)$. En déduire une expression de $F(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

Scanned with CamScanner

UFR / ST

MPI / L2S3

Université Nazi Boni

Novembre 2022

Epreuve de Thermodynamique physique *(Session normale)*

Durée : 02 heures

Les documents et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 2 (05 points)

1. **Répondre par Vrai ou Faux.**
   a. La variation de l'enthalpie entre deux états A et B dépend du chemin choisi de A à B.
   b. Il est impossible de réaliser une machine monotherme qui reçoit de la chaleur et la transforme intégralement en travail.
   c. Il est possible de réaliser une machine ditherme réceptrice qui prélève de la chaleur à la source froide et cède de la chaleur à la source chaude.
   d. L'enthalpie, l'énergie interne, l'entropie, la chaleur, le travail sont toutes des formes d'énergie.
2. Donner l'expression du coefficient d'augmentation de pression à volume constant $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$:
   a. pour le gaz parfait
   b. pour le gaz d'équation d'état $\boldsymbol{p(V - nb) = nRT}$.
   c. pour le gaz de Van der Waals d'équation d'état $\left(\boldsymbol{p + \frac{n^2 a}{V^2}}\right)\boldsymbol{(V - nb) = nRT}$

   a *et* b sont des constantes et n le nombre de moles du gaz

Exercice 2 (05 points)

1. La f.é.m. du couple plomb-cobalt, lorsqu'une des soudures est à 0°C, vaut :

θ(°C)	0	50	150	250
$E(mV)$	0	1,114	3,902	7,436

Vérifier que, dans le domaine étudié (0°C à 250°C), cette f.é.m. peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{E = a\theta + b\theta^2}$$

et déterminer les coefficients a et b.

2. Si le thermocouple n'avait été étalonné qu'à 250 °C, et en admettant pour la f.é.m. (E) une loi de variation linéaire en fonction de la température θ,
   a. Etablir la loi de variation de E en fonction de la température
   b. A quelle température l'écart par apport à la loi réelle serait-il maximale ?
   c. Tracer les courbes de variation de $E = f(\theta)$ dans les deux cas et vérifier la réponse précédente.

Scanned with CamScanner

Exercice 3 (10 points)

Un gaz parfait décrit le cycle ABCD constitué des transformations suivantes :

- A⟶B : Compression isotherme.
- B⟶C : chauffage isochore jusqu'à la température T0.
- C⟶D : détente isotherme.
- D⟶A : refroidissement isochore jusqu'à la température TA.

Données :

$P_A = 10^5\ Pa;\ V_A = 1{,}40\ m^3;\ V_B = 0{,}38\ m^3; n = 32\ moles;\ T_C = 270\ K;\ C_V = 20{,}8\ J.mol^{-1}.K^{-1}$

1. Représenter le cycle sur les diagrammes de Clapeyron (P, V) et d'entropie (T, S).
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Etat	P (Pa)	V (m^3)	T (K)
A	10^5	1,40	
B		0,38	
C			270 K
D			

3. Calculer le travail total échangé au cours du cycle. S'agit-il d'un cycle moteur ou d'un cycle réfrigérateur ?
4. Identifier les transformations au cours desquelles le Système reçoit de la chaleur. Calculer la quantité totale de chaleur reçue.
5. En déduire le rendement du cycle.

Scanned with CamScanner

UFR / SEA **Université Nazi Boni**

MPI / L2S3

Epreuve Thermodynamique physique - optique

Session normale *Février 2022*

Durée : 03 heures

Exercice 1 (05 points)

Les variables d'état P, V et T sont reliées par une équation d'état de type $f(P,V,T)=0$. Les coefficients thermoélastique d'un gaz sont définis par les relatons suivantes :

- Coefficient de dilatation isobare : $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$
- Coefficient de compressibilité isochore : $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$
- Coefficient de compressibilité isotherme : $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

Exprimer pour une mole de gaz le coefficient de dilatation à pression constante α et le coefficient de compressibilité isotherme χ :

1. a. Dans le cas où le gaz obéit à l'équation : $\boldsymbol{PV = RT\left(1+\frac{B}{V}\right)}$ (B ne dépend que de T).

   b. Montrer que pour un gaz parfait $\alpha = \beta = \frac{1}{T}$ et $\chi = \frac{1}{P}$.

   En déduire une relation entre α, β et χ.

2. Dans le cas où le gaz obéit à l'équation : $\boldsymbol{\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT}$ (a et b constantes du gaz).

Exercice 2 (05 points)

Un solide de masse m_1, de chaleur massique à pression constante C_{P1} à la température T_1 est mis en contact thermique avec un corps de masse m_2, de chaleur massique à pression constante C_{P2} à la température T_2. Le système formé par l'ensemble des deux corps est isolé.

1. Calculer la température d'équilibre $T_{éq}$ du système Evaluer ΔS_1 et ΔS_2, variations d'entropies du système constitué par le corps de masse m_1 et du système constitué par le corps de masse m_2, respectivement.
2. En déduire ΔS, variation d'entropie du système formé par l'ensemble des deux corps.

Application numérique :

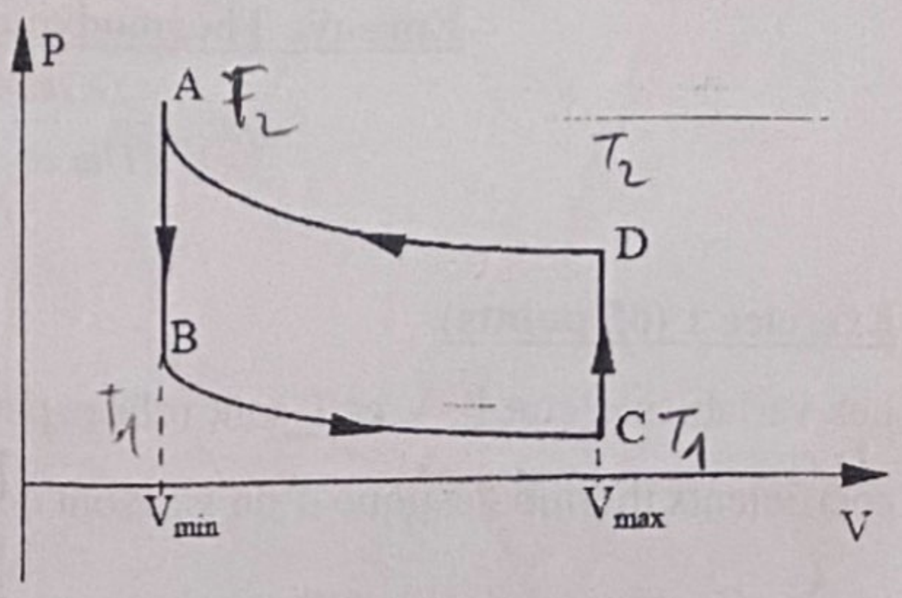
$m_1 = 500\,g$, $C_{P1} = 900\,J.kg^{-1}.K^{-1}$, $m_2 = 600\,g$, $C_{P2} = 380\,J.kg^{-1}.K^{-1}$, $T_1 = 27°C$,

$T_2 = 60°C$

Scanned with CamScanner

Exercice 3 (10 points)

On étudie une machine ditherme fonctionnant suivant le cycle de Stirling représenté sur la figure 1.



On distingue dans ce cycle :

- deux transformations réversibles isochores
- deux transformations réversibles isothermes aux températures T_1 et T_2 $(T_1 < T_2)$

Le fluide décrivant ce cycle dans le sens ABCDA est assimilé à un gaz parfait.

On donne :

- température de la source froide $T_1 = 276\,K$
- température de la source chaude $T_2 = 293\,K$
- rapport volumétrique $\frac{V_{max}}{V_{min}} = 3{,}0$
- constante du gaz parfait $R = 8{,}32\,J.mol^{-1}.K^{-1}$
- capacité calorifique molaire à volume constant du fluide $c_v = 21\,J.mol^{-1}.K^{-1}$

1. Quelle est la nature de chacune des transformations $A-B, B-C, C-D$ et $D-A$?
2. Pour **une mole** de fluide :
   a. Exprimer pour chacune des transformations le travail et la quantité de chaleur échangés par le fluide avec le milieu extérieur.
   b. Calculer les valeurs numériques des grandeurs exprimées ci-dessus pour les transformations A-B et B-C.
   c. Exprimer le travail total W échangé par cycle entre le fluide et le milieu extérieur. Le fonctionnement du cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier la réponse.
3. On appelle Q_1 la quantité de chaleur prise à la source froide par une mole de fluide au cours d'un cycle. En utilisant les résultats de la question 2, donner la valeur numérique de Q_1.
4. Calculer le rendement du cycle. Citer une application possible de cette machine.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI — Année académique 2020-2021

UFR/SEA Deuxième année MP — Durée : 3h

Document non autorisé,

Les réponses doivent être soigneusement justifiées,

La rédaction entrera pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Devoir de Probabilité

Exercice 1 (5pts)

1) Soient X une variable aléatoire de loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma)$, a un réel strictement positif, b un réel et $\tilde{X}$ la variable aléatoire définie par $\tilde{X} = aX + b$. Montrer que $\tilde{X}$ suit la loi Normale $\mathcal{N}(a\mu + b,\ a\sigma)$.

2) D'après les résultats des années précédentes, on peut considérer que la note (sur 20) d'un étudiant de deuxième année de Licence mention Mathématiques de l'UPB à l'examen de Probabilités Elémentaires est une variable aléatoire X de loi Normale $\mathcal{N}(9,\ 4)$.

a) Déterminer la probabilité qu'un étudiant obtienne la moyenne.

b) Quel résultat mathématique permet de confondre cette probabilité avec la proportion d'étudiants ayant la moyenne ?

c) Environ 200 étudiants ont passé l'examen au cours des quatre dernières années. Donner, sans calcul, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y égale au nombre d'étudiants ayant obtenu la moyenne. Calculer la probabilité que le nombre d'étudiants ayant obtenu la moyenne soit compris entre 70 et 100. On pourra utiliser une approximation de loi en précisant les conditions d'application.

Exercice 2 (5ts)

Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	-1	1	2
-2	0,2	0,2	α
0	0,1	0,1	0,05
1	0,2	0	0,1

1) Déterminer la valeur de α.

2) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

3) Donner la nature de l'indépendance de X et de Y.

4) Calculer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$. En déduire $E(X/Y = 1)$.

5) Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant que $Y \neq 2$.

Scanned with CamScanner

6) Calculer $E(XY)$ et en déduire $Cov(X,Y)$.

7) On pose $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z, puis $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 3 (4pts)

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis, on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.

Soit G_n l'événement «Gagner la partie n», et $u_n = P(G_n)$. On note $v_n = P(\overline{G_n})$.

1) Ecrire 2 relations entre u_n, u_{n+1}, v_n, v_{n+1}.

2) A l'aide de la matrice mise en évidence en déduire u_n et v_n. Faire un calcul direct à l'aide de $u_n + v_n$.

Exercice 4 (4pts)

1) Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer sa fonction caractéristique.

2) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $P_Y = \mathcal{P}(\lambda')$. Quelle est la fonction caractéristique de $X + Y$? En déduire que $\mathcal{P}(\lambda) * \mathcal{P}(\lambda') = \mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.

Exercice 5 (5pts)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité jointe est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & si \quad 0 \leq y \leq x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) Vérifier que $f(x,y)$ est bien une fonction de densité.

2) Calculer la probabilité suivante : $P(X + Y < 1)$

3) Déterminer les densités marginales de X et de Y

4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Barème détaillé :

Exercice 1 : 2+(1+1+1)=5pts

Exercice 2 : 1+1+1+1+1=5pts

Exercice 3 : 2+2=4pts

Exercice 4 : 2+2=4pts

Exercice 5 : 2+1+1+1=5pts

Scanned with CamScanner

Université Nazi Boni/UFR-SEA — Année : 2020-2021
MPI 2 — Date : 05/2022
Semestre 1 — Durée : 3h40mn

Contrôle de Probabilité-Session de rattrapage

N.B : Calculatrice non programmable autorisée.

Exercice 1 (4pts) .

Les questions 1 & 2 sont indépendantes.

1) Un jeune étudiant de l'UNB du département Mathematiques s'habille très vite un matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y'a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires.
   a) Combien y-a-t-il de manières de s'habiller ?
   b) Quelles sont les probabilités des évènements suivants :
      A :"il est tout en noir "
      B :"une seule pièce est noire sur les trois."
2) Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{1, ..., N\}$. On pose $X = U - V$ et $Y = U + V$. Déterminer la covariance entre X et Y.

Exercice 2 (4pts) .

Soient $m, \sigma \in \mathbb{R}$. On dit que X suit une loi log-normale de paramètre (m, σ^2) si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

1) Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite.
2) Calculer sa densité
3) Démontrer que $E(X) = \sqrt{e}$.

Exercice 3 (4pts) .

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité discret. Si $A \subset \Omega$ est un évènement, on note $1_A : \Omega \to \{0; 1\}$ la fonction indicatrice de A : $\forall\, \omega \in \Omega$,

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \in A^c \end{cases}$$

1) Pour des évènements A et B, exprimer 1_{A^c} et $1_{A \cap B}$ en fonction de 1_A et 1_B.
2) Vérifier que, pour tout évènement A, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[1_A]$.
3) Montrer que si X est une variable aléatoire intégrale à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

Exercice 4 (8pts)

Soit a un réel strictement positif et f la fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & si\ t < 0 \\ f(t) = ae^{-at} & si\ t \in [-1, 1] \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

1) a) Montrer que, pour tout t de $\mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

b) Pour tout x strictement positif, calculer, en fonction de x et de a, l'intégrale

$$I(x) = \int_0^x f(t)dt$$

c) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Conclure

2) Soit X la variable aléatoire dont la densité de probabilité est f. On se propose de calculer l'espérance mathématique de X.

a) Calculer, en fonction de x et de a l'intégrale $\int_0^x tf(t)dt = 1$.

b) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{a}$.

3) Calculer la variance de X.

"Les choses sans mérite attirent des régards sans estime."

"Bon courage!!"

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
UFR-SEA
MPI/L2/S3

Année académique : 2021-2022
Date : 17/12/2022
Durée : 3h30mn

Contrôle de Probabilité-Session normale

N.B : Calculatrice ***non programmable autorisée.*** *Contrôle de 04 exercices sur 02 pages.*

Exercice 1 (4pts)

Au poste de gendarmerie de Nasso, on remarque qu'entre 9h et 10h, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle. Aussi, l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité qu'une (01) personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : $3, 4, 5, ...$ personnes se présententt au poste entre 9h et 10h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au poste entre 9h et 10h ?

Exercice 2 (4pts)

Partie A

Définition :

Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi exponentielle de parmètre strictement positif λ si

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Démontrer que $p(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$
2. En déduire que pour $s, t \in \mathbb{R}_+^*$: $p(X > s + t/X > t) = p(X > s)$
   (cette loi est appelée loi de durée sans vieillissement).

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un super marché peut être modélisée par un variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de parmètre strictement positif λ.

1. Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leqslant 10) = 0.7$
   On prendra pour la suite de l'exercice la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.
2. Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle $p(T > 15/T > 10)$
3. Sachant qu'un client à déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes, on donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.

Exercice 3 (4pts)

Dans une revue, on peut lire :"On estime à $60,5\%$ les Burkinabès qui visitent au moins un fois Ouaga ou Bobo dans le courant de l'année." On considère 100 personnes prises au hasard, avec remise, dans la population Burkinabè. On désigne par X la variable qui à chaque prélèvement de 100 personnes associe le nombre de celles qui ne partent pas dans ces deux villes dans le courant de l'année.

1. Justifiez que X suit une binomiale, on donnera son espérance et l'écart type.
2. Calculer la probabilité de l'évènement "X=45".
3. On décide d'approcher X par la loi normale notée Y. Donner les paramètres de cette loi normale et calculer $p(44,5 \leqslant Y \leqslant 45,5)$.
4. Déterminer la probabilité qu'au plus 30 de ces 100 personnes ne visitent pas une de ces villes dans le courant de l'année.

Exercice 4 (4pts)

Les questions 1 & 2 sont indépendantes.

1. Dans une famille de 3 filles et 3 garçons, quelle est la probabilité que les 3 filles soient les plus agées ?
2. Soient A et B deux évènements tels que $p(A/B) = 1$. Montrer que $p(A^c/B^c) = 1$.

Scanned with CamScanner

Exercice 5 (4pts)
La loi du couple (X , Y) est définie par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}a$	a	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Trouver a puis déterminer les lois marginales de X et Y.

2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Calculer E(X), E(Y) et E(XY)

4. En déduire la covariance de X et Y. Ce résultat confirme t-il votre réponse à la question 2 ?

«La "substance" du réel n'est qu'un nuage de probabilités, une fumée mathématique.»
Jean Guitton, Dieu et la science

BON COURAGE!!!

Scanned with CamScanner

UNB
UFR/ST

Année academique : 2019-2020
Classe : Licence 2 de MPI

Contrôle de Probabilité 1 (Session normale) *Durée :3h*

Exercice 1 :(2+1+1+0.5+0.5=5pts)

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soient a, b et n des entiers naturels. Sous l'hypothèse que toutes les conditions sont vérifiées, établir :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

et en déduire les sommes

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$$

2. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$
4. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p avec $p \leq n$. Combien y a t-il d'injections de E dans F ?
5. On considère 20 billes de même dimension peintes à l'aide de 4 couleurs différentes : le rouge, le noir, le bleu et le vert. On suppose qu'il y a 5 billes de couleurs rouge, 4 billes de couleurs noir, 6 billes de couleur bleu et le reste en vert. De combien de manières peut-on disposer ces 20 billes en les alignant, les billes de même couleur étant supposées indicernables ?

Exercice 2 :(1+1+2+2=6pts)

On dispose de deux urnes U et V, la première comporte a boules blanches et b boules noires, la seconde b boules blanches et a boules noires. Tous les tirages s'effectuent avec remise. On désigne par U_n l'évènement : ≪ le n-ième tirage s'effectue dans U ≫, par V_n l'évènement : ≪ le n-ième tirage s'effectue dans V ≫, par B_n l'évènement :≪ la n-ième boule tirée est blanche ≫.

1. Que valent les probabilités : $P(B_n/U_n)$ et $P(B_n/V_n)$?
   Si à l'étape n, on a tiré une boule blanche, le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans U. sinon il s'effectue dans V.
2. Calculer $P(B_{n-1}/B_n)$ et $P(B_{n+1}/\overline{B_n})$.
3. En posant $p_n = P(B_n)$, déduire une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
4. Montrer que p_n tend vers $\frac{1}{2}$ indépendemment de l'urne par laquelle on commence.

Scanned with CamScanner

Exercice 3 (1+0.5+0.5+1+1+1=5pts)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $P(X=k)=\frac{\exp(-2)2^k}{4k!}(1+\alpha k)$ où α est un réel.
   Déterminer α et calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Le nombre d'appels téléphonique à un standard entre 10h et 11h suit une loi de Poisson de paramètre λ. Supposons que pour chaque appel il y ait une probabilité donnée p pour que le correspondant demande un poste A.
   (i) Calculer la probabilité qu'il y ait k appels vers A entre 10h et 11h sachant qu'il y a eu n appels au standard.
   (ii) Calculer la probabilité $P(n,k)$ qu'il y ait n appels au standard et k appels au poste A.
   (iii) Montrer que la loi de probabilité du nombre d'appels au poste A entre 10h et 11h est une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 4 :(1+1+1+0.5+0.5=4pts)

On considère un couple de variables aléatoires continues $(X;Y)$ dont la densité jointe est donnée par :

$$f(x,y)=\begin{cases} k(\frac{1}{x^2}+y^2) & \text{si} \quad 1\leq x\leq 5 \quad \text{et} \quad -1\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour quelle(s) valeurs de k la fonction f est-elle bien une densité ?
2. Calculer les densités marginales de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la densité marginale de X sachant que $Y=0$.
5. Calculer la covariance de X et Y.

Scanned with CamScanner

Date : Jeudi 03 février 2022

Academic year : *2021 - 2022*

Last Name : [redacted]

UNB / UFR- SEA / MPI – *L 2 – S3*

First Name(s): [redacted]

Signature:

Date / Place of birth: [redacted]

R N^{er} : [redacted]

Mark : 12 / **20** Appreciation: Très bien

12

Auguste Pierre BAZONGO

Knight of the Merit Order

END - OF – SEMESTER 3 ENGLISH TEST (55 mn)

I. READING COMPREHENSION (5 / 5)

According to the text below,

1- Calculus is one of the most complex branch of mathematics. True ● / False O

2- Algebra and Calculus help solve equations. True ● / False O

3- Differential calculus is a major branch of Geometry and Algebra. True O / False ●

4- Mathematical analysis is an advanced form of Calculus. True ● / False O

5. Calculus alone can solve problems in science, economics, and engineering. True O / False ●

Text: Calculus

Calculus (Latin, calculus, a small stone used for counting) is a branch in mathematics focused on limits, functions, derivatives, integrals, and infinite series. This subject constitutes a major part of modern mathematics education. It has two major branches, differential calculus and integral calculus, which are related by the fundamental theorem of calculus. Calculus is the study of change, in the same way that geometry is the study of shape and algebra is the study of operations and their application to solving equations. A course in calculus is a gateway to other, more advanced courses in mathematics devoted to the study of functions and limits, broadly called mathematical analysis. Calculus has widespread applications in science, economics, and engineering and can solve many problems for which algebra alone is insufficient.

Les réponses surchargées sont frappées de nullité.

Scanned with CamScanner

II. LISTENING COMPREHENSION (3 / 5)

According to the video "the map of mathematics"

1- Only humans started counting at the beginning. True ● / False O

2- Persians wrote the first book on algebra but *zero* came from Greece. True O / False ●

3- Negative numbers were invented in India and equations in China. True O / False ●

4- Pure Mathematics help solve real world problems. True ● / False O

5- Calculus is part of applied mathematics. True O / False ●

III. WRITING

A. Re-order theses sentences using 1,2,3, ...10 to obtain a coherent paragraph. (4 / 10)

a 3. It consists in burning fuels to generate energy.

b 1. We use two main sources of energy in our daily life.

c 7. Solar energy, wind power and other sources like geothermal energy are examples of the kind ; so this source is especially abundant and less expensive.

d 5. It consists in using panels , towers or other types of instalations to generate energy .

e 10 It is those two main sources of energy that we use in our daily life.

f 4. In the second position stands renewable energies.

g 2. In the first position stands fossil fuel energies.

h 6. In Burkina Faso, SONABEL uses this source to produce more than 90% of the electricity the country needs.

i 9. That is why in countries where people use those sources, electricity is not so expensive.

j 8. That is the reason why electricity is very expensive in this country.

Les réponses surchargées sont frappées de nullité.

Scanned with CamScanner

Date : Wednesday, november 23rd 2022 Academic year : 2022 - 2023

Last Name : [redacted] UNB / UFR- SEA / MPI – L 2 – S3

First Name(s): [redacted] Signature:

Date / Place of birth: [redacted] R N^er :

Mark : 16 / 20 Appreciation: Very Good

Auguste Pierre BAZONGO

Knight of the Merit Order

END - OF – SEMESTER 3 ENGLISH TEST (55 mn)

I. WRITING (10 / 12 pts)

Topic:

Is pure mathematics important in your daily life? Why? (15 – 17 lines)

how-many ?

← 3 cm →

I Pure mathematics is important in our daily life for many reasons. Firstly, we use the four operations in our daily life. For example, we use the four operations in the domaine of Computer and to calculate the averages. We use them. Secondly, algebra is important in our life because we use algebraic equation to solve our problems. Moreover, we use the Calculus to Calculate the volume of our objects. For example, the using of integral to Calculate volumes and areas. We use integral to Calculate the area of our lands. Finally, pure mathematics is important in our daily life. In fact, we use geometry and Mesuration in the building. Welders use them generaly.

It is for those reasons that pure mathematic is important in our daily life. We must should be learning pure mathematic.

Les réponses surchargées sont frappées de nullité.

Scanned with CamScanner

II. READING COMPREHENSION (6 / 8 pts)

According to the text below,

1- The text is about some applications of pure mathematics. **True O / False ●**

2- Pure mathematics helps develop mathematical physics and theoretical physics. **True O / False ●**

3- Mathematical chemistry and engineering are two applications of mathematics in natural sciences.

True O / False ●

4- When the mathematics need to be very complex to solve problems, numerical analysis is used.

True ● / False O

5- Numerical analysis is also used in psychology and biology. **True ● / False O**

6- Probability and statistics play exactly the same role in applied mathematics. **True O / False ●**

7- Computer sciences did not exist before programmable computer. **True O / False ●**

8- the author makes a close relationship between pure mathematics and applied mathematics.

True ● / False O

Text: Applied Mathematics

"Mathematical and theoretical physics has a very close relationship with pure maths. Mathematics is also used in the other natural sciences with mathematical chemistry and biomathematics which look at loads of stuff from modelling molecules to evolutionary biology. Mathematics is also used extensively in engineering, building things has taken a lot of maths since Egyptian and Babylonian times. Very complex electrical systems like aeroplanes or the power grid use methods in dynamical systems called control theory. Numerical analysis is a mathematical tool commonly used in places where the mathematics becomes too complex to solve completely. So instead you use lots of simple approximations and combine them all together to get good approximate answers. For example if you put a circle inside a square, throw darts at it, and them compare the number fo darts in the circle ans square portions, you can approximate the value of pi. But in the real world numerical analysis is done on huge computers. Game theory looks at the best choices are given a set of rules and rational players and it's used in economics when the players can be intelligent, but not always, and other ares like psychology, and biology. probability is the study of random events like coin tosses or dice or humans, and statistics is the study of large collections of random processes or the organization and analysis of data. This is obviously related to mathematical finance where you want model financial systems and get an edge to win all those fat stacks. Related to this optimisation, where you are trying to calculate the best choice amongst a set of many different options or constraints, which you can normally visualise as trying to find the highest or lowest point of a function. Optimisation problems ore second nature to us humans, we do them all times: trying to get the best value for money, trying to maximise our happiness in some way. Another area that is very deeply related to pure mathematics is computer science, and the rules of computer science were actually derived in pure maths and is another example of something that was worked out way before programmable computers were built. Machine learning: the creation of intelligent computer systems uses many areas in mathematics like linear algebra, optimisation, dynamical systems and probability. And finally the theory of cryptography is very important to computation and uses a lot of pure maths like combinatorics and number theory."

From "The map of mathematics"

Les réponses surchargées sont frappées de nullité.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI — **Année académique : 2021-2022**
UFR-SEA — **Date : 03/02/2023**
MPI/L2/S3 — **Durée : 3h30mn**

Contrôle de Probabilité-Session de rattrapage

N.B : Calculatrice ***non programmable autorisée.*** *Contrôle de 04 exercices sur 02 pages.*

Exercice 1 (5pts)

Pendant la correction d'une épreuve de probabilité, un correcteur attribue aléatoirement à chaque candidat une note choisie parmi les entiers 0, 1, 2, ...,19. Il note indépendamment les uns des autres. Seront déclarés admis les candidats obtenant une note supérieure ou égal à 10 et, eux seuelement. Les candidats obtenant la note 0, et eux seuelement perdront le droit de se présenter une nouvelle fois à cette épreuve.

1. Fôfô est l'un des candidats. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A :"Fôfô sera admis"
   B :"Fôfô perdra le droit de se présenter une nouvelle fois"
   C :"Fôfô obtiendra 9 ou 10"
2. Il y'a exactement 100 candidats. X est la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui seront admis. Y est la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui perdront le droit de se présenter une nouvelle fois.
   (a) Donner la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
   (b) Proposer une approximation convenable pour X et utiliser cette approximation pour évaluer la probabilité qu'il y ait au moins 55 candidats admis.
   (c) Donner la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et sa variance.
   (d) Proposer une approximation convenable pour Y et utiliser cette approximation pour évaluer la probabilité qu'il y ait au plus 2 candidats perdant le droit de se présenter une nouvelle fois.
3. Il y a exactement 100 candidats, numérotés de 1 à 100. X_i est la variable aléatoire égale à la note qui sera attribuée au candidat numéro $i(1 \leqslant i \leqslant 100)$. $\bar{X}_{100}$ est la variable aléatoire égale à la moyenne des 100 notes qui seront attribuées.
   (a) Donner l'espérance mathématique et la variance de $X_i(1 \leqslant i \leqslant 100)$.
   (b) Donner l'espérance mathématique et la variance de $\bar{X}_{100}$.

Exercice 2 (7pts)

Partie A

Définition :
Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi exponentielle de parmètre strictement positif λ si

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Démontrer que $p(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$
2. En déduire que pour $s, t \in \mathbb{R}_+^*$: $p(X > s + t/X > t) = p(X > s)$
   (cette loi est appelée loi de durée sans vieillissement).

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un super marché peut être modélisée par un variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de parmètre strictement positif λ.

1. Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leqslant 10) = 0.7$
   On prendra pour la suite de l'exercice la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.
2. Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle $p(T > 15/T > 10)$
3. Sachant qu'un client à déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes, on donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.

Scanned with CamScanner

4. On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.
   (a) Donner la nature et les élements caractéristiques de Y.
   (b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieur à 10 minutes.
   Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Partie C

Le temps mésuré en heures, nécessaire pour préparer un devoir de probabilité digne de MPI 2^{eme} année suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

1. Quelle est la probabilité que la préparation excède deux heures ?
2. Quelle est la probabilité qu'une préparation prenne au moins 10H, étant donné que sa durée a déjà dépassé 9H.

Exercice 3 (4pts)

Les questions 1 & 2 sont indépendantes.

1. Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Définissons $Y = X^2$.
   Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité.
   Cette distribution est appelée loi de $\mathcal{X}_1^2$ (Khi-2 à 1 degré de liberté)
2. Soit $I = [1; +\infty[$ et $f_\lambda(t) = \lambda t^2$. Déterminer le réel λ pour lequel f_λ est une densité de probabilité.

Exercice 4 (4pts)

Soient deux variables X et Y dont la loi loi jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	0,22	0,20	0	0,02
1	0,05	0,11	0,04	0,01
2	0,04	0,07	0,02	0,22

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer E(X) et E(Y)
3. Caluculer la loi conditionnelle de X sachant que Y=2.
4. Calculer E(X/Y=2) et V(X/Y=2).
5. Calculer Cov(X,Y) puis le coefficient de correlation.
6. Les deux variables sont-elles indépendantes ?
7. Déterminer la loi de distribution de la variable aléatoire $W = Y^2 - X$

«Le calcul des probabilités, appliquées à la mortalité humaine a donné naissance à une science nouvelle : celle des assurances.»

BON COURAGE!!!

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 **22 Janvier 2022**

Devoir d'algèbre III (Durée : 3h)

Exercice 1. (6pts)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^4 = M^2$.

1. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$ et en déduire que si $I_n + M$ est inversible alors $M^3 = M^2$.
2. Déterminer deux polynômes P et Q tels que $(1 + X)P + (X^2 - X^3)Q = 1$.
3. Montrer que si $M^3 = M^2$, alors $I_n + M$ est inversible et déterminer l'inverse de $I_n + M$ comme polynôme en M.
4. Déterminer les valeurs propres de M.
5. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^3 = M$.

Exercice 2 . (8pts)

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $m_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable? trigonalisable? justifier.
2. Ecrire la décomposition spectrale associée à A et déduire la décomposition de $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N nilpotente telle que $DN = ND$, en fonction des projecteurs P_i et des nilpotents N_i, pour $i = 1, 2$.
3. Ecrire les relations entre A, P_i et N_i et en déduire P_i et N_i en fonction de A et I_4.
4. Déterminer D et N en fonction de A et I_4.
5. Calculer les projecteurs spectraux P_i et déduire les nilpotents N_i en utilisant le théorème de Bezout.
6. Déterminer A^n en fonction des P_i, N_i et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire A^n en fonction de A^2, A, I_4 et n.
8. Ecrire e^A sous forme polynômiale en A.

Exercice 3. (6pts)

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et F un s.e.v de E.

1. On considère les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^3$ définies par : $\varphi_1(x, y, z) = 2x + y - z$, $\varphi_2(x, y, z) = -x + 3y + 4z$ et $\varphi_3(x, y, z) = 5x - 3y + 2z$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
   (b) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{B}_1^* = (\varphi_1, \varphi_2)$
   (c) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base préduale de $\mathcal{B}^*$.
   (d) Exprimer dans la base $\mathcal{B}^*$ la forme linéaire exprimée dans $\mathcal{B}_0^*$ par $f(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$
2. Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^0 = F$.
3. Montrer que F est un hyperplan de E si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle sur E dont F est son noyau.

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 Décembre 2022

Devoir d'algèbre III (Durée : 3h)

Exercice 1. (4pts)

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice de projection et φ l'application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = PM + MP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 2. (4pts)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice k.

1. Montrez que 0 est la valeur propre seule de f.
2. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Démontrer que les vecteurs x, $f(x)$, $f^2(x)$, . . . , $f^{p-1}(x)$ sont linéairement indépendants. En déduire que $p \leq n$.
3. Démontrer que f est nilpotent d'ordre n si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $A = (a_{ij})$ de f dans $\mathcal{B}$ vérifie $a_{ij} = 0$ si $j \neq i + 1$ et $a_{i,i+1} = 1$.

Exercice 3. (6pts)

Soit M la matrice suivante et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à M.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M n'est pas diagonalisale mais trigonalisable.
2. Déterminer la décomposition spectrale de M.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la forme de Jordan de M.
4. Résoudre le système différentiel suivant : $X'(t) = MX(t)$ avec $X(0) = {}^t(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 4. (6pts)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimensions finies et.

1. On considère les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^3$ définies par : $\varphi_1(x, y, z) = x + y - z$, $\varphi_2(x, y, z) = -x - 2y + 4z$ et $\varphi_3(x, y, z) = 2x - 3y + 2z$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base préduale de $\mathcal{B}^*$.
   (b) Exprimer dans la base $\mathcal{B}^*$ la forme linéaire exprimée dans $\mathcal{B}_0^*$ par $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Montrer que $Im({}^t f) = Ker(f)^{\perp}$ et $Ker({}^t f) = Im(f)^{\perp}$
   (b) En déduire que f est injective si et seulement si ${}^t f$ est surjective.

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 **Mai 2022**

Rattrapage d'algèbre III (Durée : 3h)

Exercice 1. (4pts)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f_A(M) = AM$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $A^2 = A$, alors f_A est diagonalisable.
2. Montrer que f_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 2. (7pts)

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $n > 0$ et φ l'application définie par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Pour $k \in \{0, \cdots, n\}$, montrer que $P_k = (1 - X^2)^k$ est une droite vectorielle propre de φ et déduire la valeur propre associée.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
4. Pour quelles valeurs de n, φ est-il un automorphisme ?

Exercice 3. (9pts)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ dans une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour quelles valeurs de α, f_α est un automorphisme ?
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_α. En déduire le spectre de A_α.
3. Pour quelles valeurs de α, la matrice A_α est diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme minimal de A_α en fonction de α.
5. On suppose pour la suite $\alpha = 0$
   (a) Déterminer les sous espaces propres et caractéristiques de A_0.
   (b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $ker(A + I)^2$ est un plan stable par f_0.
   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice T de f_0 est la réduction de Jordan de A_0.
   (d) Résoudre le système différentiel $X' = A_0X$ avec $X(0) = (1, 1, 1)$.

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ $\mathbf{MPI_2}$ Mars 2022

Rattrapage d'algèbre III (Durée : 3h)

Exercice 1. (8pts)

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E, l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:
$E = \{M(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Diagonaliser A et déduire que B est aussi diagonalisable.
3. En déduire que pour tout couple de réels (x, y), $M(x, y)$ est diagonalisable dont on précisera ses valeurs propres.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
5. Montrer que B^2 et A^2 appartiennent à E.

Exercice 2 . (8pts)

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les puissances de A et en déduire les valeurs propres possibles de A.
3. Déterminer une base de $Ker(g - id_E)$ et une base de $Ker(g + id_E)$.
4. En déduire que g n'est pas diagonalisable.
5. Résoudre dans E, l'équation $A^2X = -X$.
6. Déterminer une base de $Ker(g^2 + id_E)$.
7. Déterminer la matrice de g^2 dans une base de E formée de vecteurs de $Ker(g - id_E)$ et de $Ker(g^2 + id_E)$ et conclure.

Exercice 3 . (4pts)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E.

1. On suppose que f et g sont diagonalisables et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise à la fois f et g.
2. Montrer que $Spec(f \circ g) = Spec(g \circ f)$.

Scanned with CamScanner

Année universitaire : **2021-2022**		Date : 19**/02/2022**	
Niveau : MPI	Semestre : **S3**	Durée : 3h00	Nombre de pages : 1
U.E :			
E.C.U.E : Informatique 3			
Session : normale		Enseignante : Dr SANOU Doda Afoussatous R	
Consignes : **Machine non autorisée**			

Exercice 1

Ecrire un programme qui offre le menu suivant et traite le choix de l'usager:

- 1 - créer un fichier
- 2 - insérer du contenu dans un fichier
- 3 - supprimer un fichier
- 4 - afficher le contenu d'un fichier
- 5 – Quitter programme

Seul l'option 5 doit arrêter le programme.

Exercice 2

Consigne : utilisation obligatoire d'une liste chainée.

On dispose du fichier des données qui contient les informations d'une moto par ligne : marque, couleur, vitesse, prix.

- créer une liste chaînée des motos
- Afficher les motos dont le prix est supérieur à 850 000fcfa

Bon courage !!!

Scanned with CamScanner

Année universitaire : **2022-2022**		Date : **24/02/2023**	
Niveau : MPI	Semestre : **S3**	Durée : 2h00	Nombre de pages : 1
U.E :			
E.C.U.E : Informatique 3			
Session : rattrapage		Enseignant : Dr SANOU D. Afoussatou R.	
Consignes : **Machine autorisée**			

Exercice 1

Ecrire un programme qui

-récupère 5 âges

-affiche la moyenne d'âge

-affiche les années de naissance correspondantes

Exercice 2

Ecrire une fonction qui prend comme argument une valeur en dollar et affiche la valeur en cfa.

Ecrire une fonction qui prend comme argument un tableau d'entiers et le nombre de valeurs à afficher.

Appeler les deux fonctions dans le main. La valeur en dollar devra être récupérée dans le main. Le nombre de valeurs du tableau à afficher également devra être renseignée dans le main. Quant au tableau, on l'initialisera avec les valeurs 1, 5, 7, 8, 9, -20, 6. (2pts)

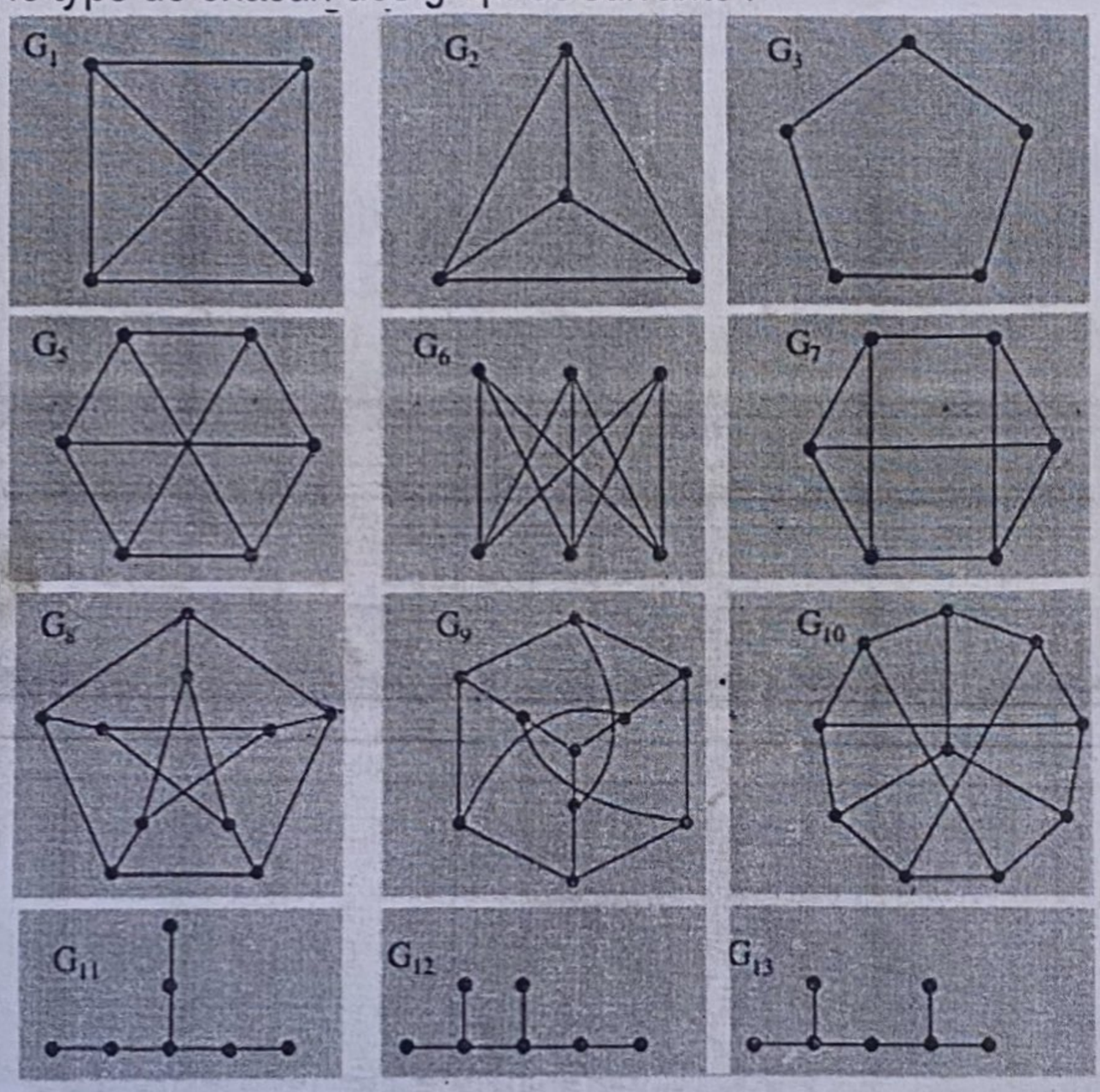
Bon courage!!

Scanned with CamScanner

Année universitaire : **2022-2023**		Date : **11/03/2023**	
Niveau :	Semestre : **S4**	Durée : 3h00	Nombre de pages : 2
U.E :			
E.C.U.E : Évaluation Informatique 4			
Session		Enseignants : Dr SANOU Doda Afoussatou R	
Consignes :			

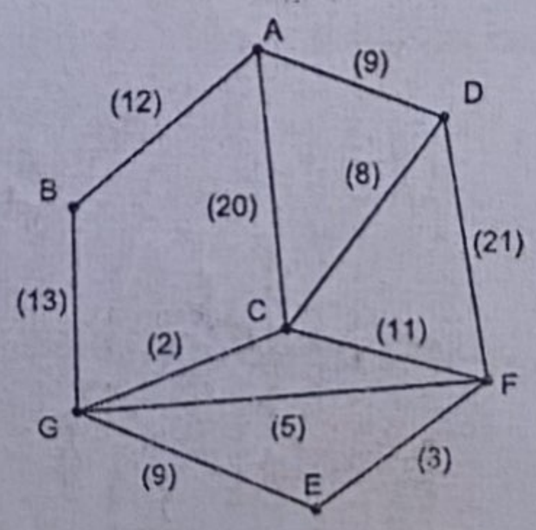
Exercice 1

Indiquez le type de chacun des graphes suivants :



Exercice 2

Des touristes sont logés dans un hôtel nommé A. Un guide fait visiter six sites touristiques nommés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la longueur en kilomètres des différents tronçons.



Scanned with CamScanner

1. A partir de l'hôtel, le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux?

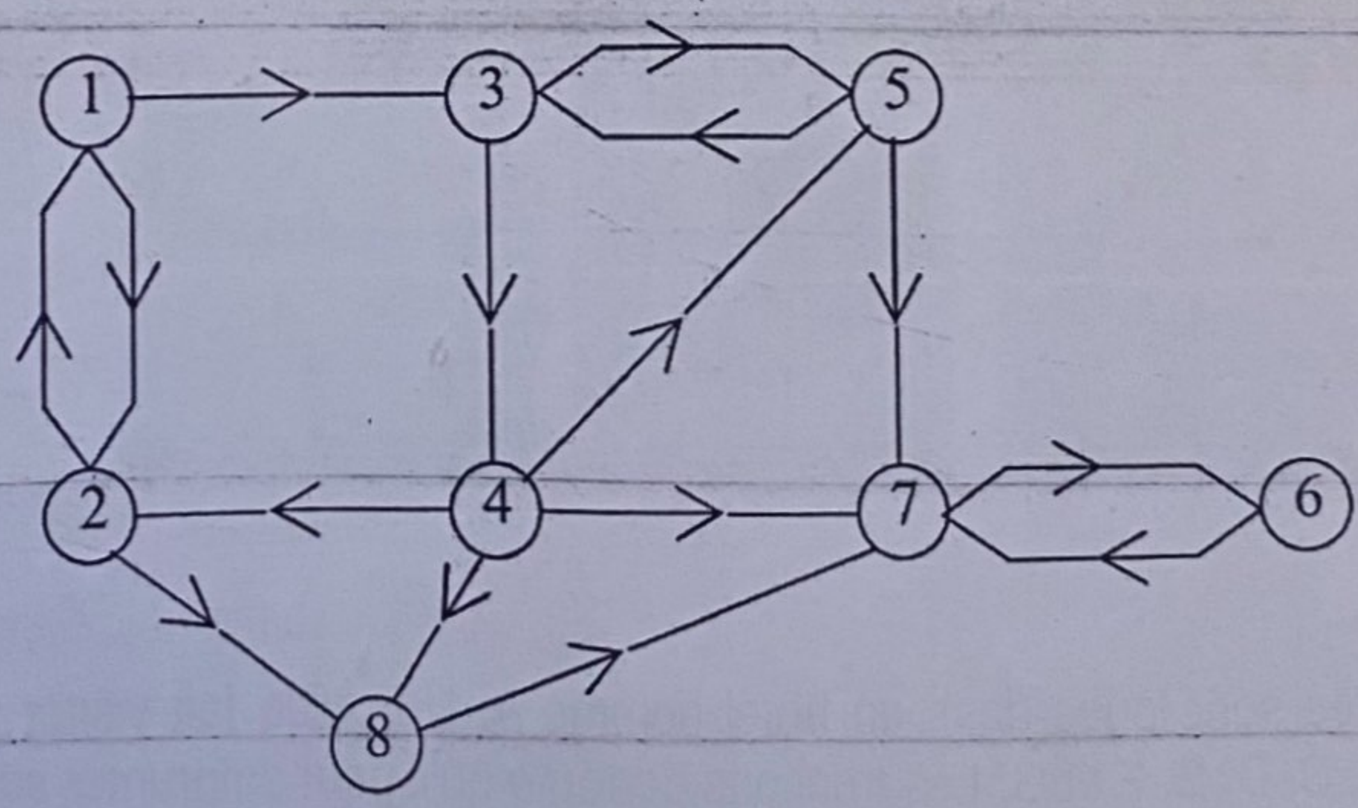
2. Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.

3. Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au musée E en utilisant l'algorithme de Dijkstra.

Exercice 3

1) Quel est l'ordre du graphe G1?
2) Donnez le demi-degré intérieur et le demi-degré extérieur et déduire le degré du sommet (7).
3) Donnez la matrice d'adjacence, la liste d'adjacence et la représentation machine correspondante à G1.
4) Ce graphe est-il complet? Connexe?
5) Est-ce que G1 est fortement connexe? Sinon déterminer les composantes fortement connexes de G1.

G1



Scanned with CamScanner

UFR/ SEA | Devoir d'Analyse 4 | MPI/L2

Durée : 2h 30

Exercice 1

Partie A : Questions de cours.

1. Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes.
   (a) Rappeler la définition de son rayon de convergence R
   (b) Montrer que si $|z| < R$ alors $S(z)$ converge et si $|z| > R$ alors $S(z)$ diverge.
2. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. En donner une démonstration ou un contre-exemple.
   (a) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n (-1)^n z^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n (-1)^n z^n$ ont même domaine de convergence.

Partie B : Séries entières.

1. On se propose de déterminer le développement en série entière de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
   (a) Justifier que la $1+x+x^2$ est celle d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
   (b) Déduire un développement en série entière de la fonction f.
2. On se propose de déterminer la série entière solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

   (a) En posant $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, justifier que $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$.
   (b) En déduire que $y(x) = \sum_0^\infty \dfrac{1}{p!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^p = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 2

Partie A : Séries de fonctions.

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle $[a,1]$ où $a > 0$.
3. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge -t-elle uniformément sur $[0,1]$.

Partie B : Séries de Fourier.

Soit f la fonction 2π-périodique définie pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ par $f(x) = |\sin x|$

1. Déterminer la série de Fourier associée à f.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$

Bonne inspiration !!!

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
UFR/SEA
Deuxième année MPI

Année académique: 2020-2021
Durée: 3h

KAIRO

Devoir d'analyse IV

Exercice 1

1. Soit (u_n) une série à termes positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

   (a) Montrer que si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

   (b) Montrer que si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

   (c) Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

2. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs vérifiant:
   $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que:

   (a) si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge;

   (b) si $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.

Exercice 2

Soit la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + x^2}$

1. Trouver le domaine D de convergence de la série $\sum f_n(x)$.

2. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur D

3. E déduire que la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur D.

4. Montrer que la somme $S(x)$ est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 3

1. Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

   a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!(n+2)}$

2. On se propose de calculer le développement en série entière en zéro de la fonction $f(x) = (\arcsin x)^2$

   (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, f est solution de l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 2 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

   (b) En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, Montrer que $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$, puis conclure.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
UFR/SEA
Deuxième année MPI

Année académique: 2020-2021
Durée: 3h

Exercice 4

Soit la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = |\cos^3 x|$ sur $[0, \pi]$.

1. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
2. Trouver le développement en série de Fourier de f.
3. En déduire la somme de la série $\sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$.

Scanned with CamScanner

DEVOIR DE STATISTIQUE INFERENTIELLE DE MPI2

Année universitaire : 2021-2022

Durée : 3h00

Question de cours :

Déterminez les estimateurs du maximum de vraisemblance des lois de Poisson, et normale.

Exercice 1 :

Les parties A et B sont indépendantes :

Partie A

Une entreprise fabrique des sacs en plastique pour les enseignes de distribution. Elle s'intéresse au poids maximal que ces sacs peuvent supporter sans se déchirer.

On suppose ici que le poids maximal que ces sacs peuvent supporter suit une loi normale d'espérance mathématique 58 Kg et d'écart-type 3 Kg.

1. Sur 200 sacs reçus, une enseigne de distribution constate un poids moyen de 57,7 Kg
   a. Donner un intervalle de confiance bilatéral de la moyenne des poids sur un échantillon de taille 200, au seuil de risque 1%
   b. Quelle est votre conclusion sur le poids moyen constate ?
2. Donner le poids moyen dépassé dans 97% des cas, sur un échantillon de taille 200.

Partie B

Les résultats d'une enquête effectuée sur une population de 1500 salaries d'une entreprise a montré que dans 65% des cas, les individus avaient au moins un crédit en cours.

Trouver la probabilité pour que deux échantillons de 200 personnes chacun indiquent plus de 10 points d'écart entre les proportions de personnes ayant au moins un crédit en cours.

Scanned with CamScanner

Exercice 2 :

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi centrée réduite.

a. Démontrer que pour $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif t_α tel que $P(-t_\alpha \leq X \leq t_\alpha) = 1-\alpha$.

b. En utilisant une table de la loi normale, donner une valeur approchée pour $t_{0,05}, t_{0,01}$.

2. Dans une population, un caractère est présent dans une proportion p. On cherche à estimer la valeur de p. pour cela, on étudie un échantillon de n éléments de cette population, et on désigne par X_n le nombre de fois où ce caractère est retrouvé dans l'échantillon.

a. Quelle est la loi de X_n ?

b. On pose $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Justifier, que, pour tous réels a<b, on a

$$P\left(Z_n \in [a,b] \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt\right).$$

c. On fixe $\alpha \in]0,1[$, et on pose $I_n = \left[p - t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} P\left({}^{X_n}/_n \in I_n\right) = 1-\alpha$.

d. Vérifier que $I_n \subset \left[p - t_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}} ; p + t_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]$.

e. Vérifier que $X_n/n \in \left[p - t_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}} ; p + t_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{X_n}{n} - t_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}} ; \frac{X_n}{n} + t_\alpha \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]$.

Exercice 3 :

Afin de mieux gérer les demandes de crédits de ses clients, un directeur d'agence bancaire réalise une étude relative a la durée de traitement des dossiers, supposée suivre une distribution normale :

Durée mn	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
Effectif	3	6	10	7	3	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des durées des dossiers de cet échantillon
2. En déduire les estimateurs ponctuels de la moyenne m et de l'écart-type σ de la population des dossiers
3. Donner une estimation de m par intervalle de confiance au seuil de risque 5%

BON COURAGE !

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
UFR/SEA
Deuxième année MPI

Année académique: 2020-2021
Durée: 3h

Devoir d'analyse IV

Exercice 1

1. Soit (u_n) une série à termes positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

   (a) Montrer que si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge.

   (b) Montrer que si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

   (c) Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

2. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs vérifiant:
   $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que:

   (a) si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge;

   (b) si $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.

Exercice 2

Soit la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + x^2}$

1. Trouver le domaine D de convergence de la série $\sum f_n(x)$.

2. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur D

3. E déduire que la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur D.

4. Montrer que la somme $S(x)$ est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 3

1. Calculer les sommes suivantes dans leur intervalle ouvert de convergence après avoir déterminé le rayon de convergence de la série proposée.

   a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{n!(n+2)}$

2. On se propose de calculer le développement en série entière en zéro de la fonction $f(x) = (\arcsin x)^2$

   (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, f est solution de l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} (1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 2 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

   (b) En posant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, Montrer que $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n$, puis conclure.

Scanned with CamScanner

Exercice 4

Soit la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = |\cos^3 x|$ sur $[0, \pi]$.

1. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
2. Trouver le développement en série de Fourier de f.
3. En déduire la somme de la série $\sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$.

Scanned with CamScanner

Université NAZI BONI
UFR/ST
PHYSIQUE (L2S4)

Année universitaire 2019 – 2020

Session normale

(Durée : 03h)

Exercice 1 (06 points)

Une cellule photoélectrique a une cathode recouverte de césium. Le travail d'extraction d'un électron du césium est de 1,9 eV.

1. On éclaire cette cathode par 2 radiations électromagnétiques 1 et 2 de longueurs d'onde $\lambda_1 = 750\,nm$ et $\lambda_2 = 540\,nm$. Quelle radiation permettra l'effet photoélectrique ? Justifier.
2. L'intensité de saturation I_S de la cellule photoélectrique est proportionnelle au flux énergétique reçu par la cathode. Le rendement quantique ρ_q de la cellule représente le rapport entre le nombre n d'électrons émis et le nombre N de photons reçus par la cathode. Calculer I_S si le flux reçu par la cathode est de $0{,}5\,mW$ pour la radiation λ_2 avec un rendement quantique $\rho_q = 2.10^{-3}$.
3. On éclaire maintenant la cathode à l'aide d'une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda_3 = 3000\,A$. Déterminer :
   a. L'énergie cinétique (en eV) et la vitesse maximale (en km/s) des électrons émis par la photocathode.
   b. La tension d'arrêt V_0 qu'il faut appliquer à la cathode pour annuler le courant électrique.

<u>On donne</u> :

Constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,Js$;

Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C$;

Asse d'un électron : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,kg$.

Exercice 2 (08 points)

1. Soient A, B, C trois opérateurs.
   a. montrer les identités suivantes :

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

   b. Dans l'hypothèse où $[A, C] = 0$ et $[B, C] = 0$, a-t-on toujours $[A, B] = 0$? justifier.

Scanned with CamScanner

c. Dans le cas où $[A,B] = i\hbar$, démontrer que $[A,B^n] = ni\hbar B$ *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.

2. On considère un système physique dont l'espace des états est à 3 dimensions et est rapporté à la base orthonormée $\{|\varphi_1>,|\varphi_2>,|\varphi_3>\}$. L'hamiltonien de ce système est donné par $H = -\omega L_z$ où ω est une constante réelle et L_z un opérateur défini par $L_z|\varphi_1> = \hbar|\varphi_1>$, $L_z|\varphi_2> = 0$ et $L_z|\varphi_3> = -\hbar|\varphi_3>$.

a. Ecrire la matrice associée à l'opérateur L_z dans la base considérée.

b. L_z est-il hermitique ? Justifier votre réponse.

c. Donner les valeurs propres et les états propres normés de H.

Exercice 3 (7 points)

On considère une particule de lasse m, piégée dans un puits infini (dans une dimension de largeur a).

$$V(x,0)\begin{cases} 0, & si -\frac{a}{2} \leq x \geq \frac{a}{2} \\ \infty, & ailleurs \end{cases}$$

Soit H l'opérateur Hamiltonien de la particule et soit $\psi(x)$ sa fonction d'onde associée.

1. Représenter le potentiel $V(x)$
2. Ecrire et résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans chacune des régions de l'espace.
3. Ecrire les conditions de continuité des fonctions propres de H et trouver les valeurs propres des énergies E_n (n entier) correspondantes.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
UFR/SEA
MPI/L2/S4

année universitaire 2020-2021

Mécanique quantique/session de rattrapage
(Durée : 3 heures, aucun document autorisé)

Exercice 1 (5 points)

Le seuil photoélectrique d'une photocathode en Cs est situé à $0,60\ \mu$. On dirige sur la photocathode un faisceau lumineux monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,50\ \mu$ de flux lumineux constant $\Phi = 1$ Watt.

1) Calculer :
   a) l'énergie cinétique maximale T des photoélectrons émis et comparer leurs vitesse à c (vitesse de la lumière dans le vide)
   b) la longueur d'onde associée à ces électrons en fonction de leur énergie cinétique
2) A quelle différence de potentiel faut-il soumettre ces électrons pour les amener à une énergie nulle
3) Quel est le rendement quantique de la photocathode, sachant que le courant photoélectrique a une intensité I = 16,3 mA.

Exercice 2 (7 points)

Soit $U(t)$ un opérateur unitaire dérivable par rapport au paramètre réel t et $H(t)$ l'opérateur défini comme :

$H(t) = i\hbar \frac{dU}{dt} U^{+}$.

1) Montrer que $H(t)$ est hermitique
2) Réciproquement, soit un opérateur $U(t)$ à priori quelconque, connu et égal à $U(t_0)$ à un instant t_0 et obéissant à :

$i\hbar \frac{dU}{dt} = \mathrm{H}(t)U(t)$ où $\mathrm{H}(t)$ est un opérateur hermitique. Montrer que :

a) $U^{+}U$ est indépendant du temps
b) UU^{+} est solution de $i\hbar \frac{d}{dt} UU^{+} = \left[H, \mathrm{UU}^{+}\right]$.
3) Que peut-on dire $U(t)$ si $U(t = \mathrm{t}_0)$ est unitaire?

Exercice (8 points)

Dans un modèle unidimensionnel de direction Ox, on considère une particule de masse m soumise à la marche de potentiel :

Scanned with CamScanner

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 \text{ si } \leq 0 \\ \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Où V_0 est une constante positive.

La particule d'énergie positive E se déplace dans le sens de croissance de x. On se donne un état stationnaire de cette particule d'énergie E > 0, décrit par la fonction d'onde $\varphi(x)$.

On posera :

$$k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ et } k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

1) Ecrire les équations de Schrödinger indépendante du temps relatives aux deux régions de l'espace (1) et (2) respectivement définies par x < 0 et x > 0, et donner leurs solutions générales $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.
2) En décrivant les conditions de passage en x = 0, déterminer les coefficients de réflexion et de transmission T ainsi que leur somme. Conclure.
3) **Application** : En toute première approximation, les électrons ''libres'' des métaux peuvent être considéré comme des particules (libres) placées dans un potentiel uniforme et égal à – V_0 à l'intérieur du morceau du métal et nul à l'extérieur. Pour les électrons d'énergie E positive, une partie non négligeable des électrons ne sort pas parce qu'ils sont réfléchis par la surface. Calculer cette portion R coefficient de réflexion) pour V_o = 10 eV et E = 0,1 eV.

Scanned with CamScanner

MPI/L2/S4
UEF : Mécanique quantique

Devoir de Mécanique quantique
(Durée : 3 heures, aucun document autorisé

Exercice 1 (6 points)

Une source lumineuse monochromatique de puissance P = 330 Watts et de fréquence $\nu = 10^{16}$ Hz éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique dont le potentiel d'extraction est V_0= 4,125 Volts.

1. Calculer le nombre de photons émis par la source pendant une seconde.
2. Quel est le seuil en fréquence de la cellule ? Dire si l'effet photoélectrique a lieu. Pourquoi ?
3. Calculer la puissance correspondante au seuil en fréquence. Cette valeur représente-t-elle un seuil en puissance ? pourquoi ?
4. Evaluer l'énergie cinétique et l'impulsion de chacun des électrons expulsés de la cathode. On négligera toute perte d'Energie.
5. En déduire la longueur d'onde de De Broglie associé à ces électrons. Le traitement physique de l'un de ces électrons peut-il relever de la mécanique classique ?
6. On mesure la position de l'un de ces électrons avec une incertitude absolue $\Delta x = 1\text{Å}$. Calculer l'incertitude absolue minimale sur la mesure de son impulsion. Conclure

Exercice 2 (6 points)

1. Soit les operateurs linéaires A, B et C
   1. Démontrer que : $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
   2. Généraliser en montrant que : $\left[A, B^n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} B^k [A, B] B^{n-k-1}$
   3. En utilisant la propriété d'antisymétrie, en déduire le commutateur $\left[A^n, B\right]$
   4. Evaluer le commutateur $[x, p_x]$
   5. En déduire les expressions des commutateurs $\left[x, p_x^n\right]$ et $\left[x^n, p_x\right]$
2. 1) Montrer que $e^{\alpha x}$ est une fonction propre relative à l'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dx}$ et en déduire sa valeur propre correspondante

   2) De même que $\exp(ikx)$ est une fonction propre de l'operateur quantité de mouvement p_x. Quelle est la valeur propre correspondante

Exercice 3 (6 points)

Dans un problème quantique à une dimension, on considère une particule de masse m se déplaçant dans le sens de croissance de x et soumise à la marche de potentiel.

$V(x) = 0$ pour $x < a$ et $V(x) = U$ pour $x > a$

Où U est une énergie potentielle constante positive et a est une valeur positive de cette particule. On se donne un état stationnaire de cette particule d'énergie propre E > U décrit par la fonction d'onde $\Phi(x)$

1. Ecrire et résoudre l'équation de Schrodinger stationnaire dans chacune des régions I et II de l'espace définies par x < a et x >a. . On utilisera les notations : $k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $k_{II}^2 = \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$, Quelle est l'interprétation physique de k_I et k_{II}
2. a) Identifier chacun des termes de la solution
   b) Ecrire les conditions de raccordement au point x = a
   c) Evaluer les amplitudes des différentes ondes planes monochromatiques associées à cette particule en fonction de l'amplitude de l'onde incidente
3. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T. Conclure.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
Unité de Formation et de Recherche en
Sciences Exactes et Appliquées
(UFR/SEA) MPII, L2, S4

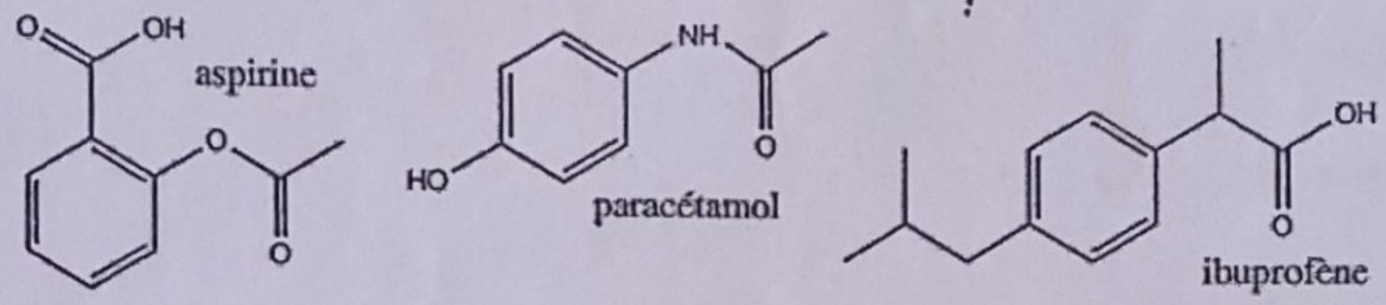
Année Universitaire 2022-2023
Date : Mai 2023
1ère Session
Durée : 1 H 30

Examen de Chimie organique

Exercice 1

Répondre par vraies ou fausses aux affirmations suivantes *(attention ! mauvaise réponse -1 ; abstention 0).*

I. Soit les formules chimiques de trois antalgiques :

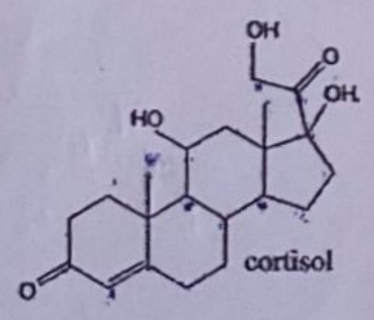


a. L'aspirine possède une fonction ester.
b. Le paracétamol possède une fonction cétone.
c. L'aspirine possède deux fonctions acides carboxyliques.
d. Les trois antalgiques possèdent au moins une fonction acide carboxylique.
e. Les trois antalgiques possèdent au moins une fonction cétone.
f. Aucun des trois antalgiques ne possède de fonction cétone.

II. Généralités sur les mécanismes réactionnels

a- Le mécanisme Substitution nucléophile mononucléaire (SN_1) fait intervenir un intermédiaire carbocationique.
b- Le mécanisme SN_2 se déroule en une seule étape élémentaire
c- Le mécanisme d'élimination monomoléculaire (E_1) fait intervenir un intermédiaire carbocationique.
d- Le mécanisme E1 se déroule en une seule étape élémentaire

III. Soit la molécule suivante :



a. Le cortisol possède un noyau benzénique.
b. Le cortisol possède deux fonctions cétone.
c. La molécule a pour formule brute $C_{21}H_{31}O_5$.
d.la molécule possède une fonction amine.

Exercice 2

I. Définir les termes "électrophile" et "nucléophile" et désigner parmi les espèces suivantes celles qui possèdent l'un ou l'autre de ces caractères :

H_2O ; CH_3OH ; H+ ; CH^3Li ; Li^+ ; $(CH3)_3C+$; Cl^- ; NH_3

II. Le chlorure de 1-phénylpropanoyle ($Ph(CH_2)_2$-COCl) réagit en présence de $AlCl_3$ pour donner un composé bicyclique A. Quelle es la structure de A ? Ecrire le mécanisme de sa formation. (Ph = benzène substitué).

Bonne chance

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
MPI/L2/S4
UEF : Mécanique quantique

année universitaire 2020-2021

Devoir de Mécanique quantique
(Durée : 3 heures, aucun document autorisé

IKAPO

Exercice 1 (6 points)

Une source lumineuse monochromatique de puissance P = 330 Watts et de fréquence $\nu = 10^{16}$ Hz éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique dont le potentiel d'extraction est $V_0 = 4{,}125$ Volts.

1. Calculer le nombre de photons émis par la source pendant une seconde.
2. Quel est le seuil en fréquence de la cellule ? Dire si l'effet photoélectrique a lieu. Pourquoi ?
3. Calculer la puissance correspondante au seuil en fréquence. Cette valeur représente-t-elle un seuil en puissance ? pourquoi ?
4. Evaluer l'énergie cinétique et l'impulsion de chacun des électrons expulsés de la cathode. On négligera toute perte d'Energie.
5. En déduire la longueur d'onde de De Broglie associé à ces électrons. Le traitement physique de l'un de ces électrons peut-il relever de la mécanique classique ?
6. On mesure la position de l'un de ces électrons avec une incertitude absolue $\Delta x = 1\text{Å}$. Calculer l'incertitude absolue minimale sur la mesure de son impulsion. Conclure

Exercice 2 (6 points)

1. Soit les operateurs linéaires A, B et C
   1. Démontrer que : $[A,\ BC] = [A, B]C + B[A, C]$
   2. Généraliser en montrant que : $\left[A,\ B^n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} B^k [A, B] B^{n-k-1}$
   3. En utilisant la propriété d'antisymétrie, en déduire le commutateur $\left[A^n,\ B\right]$
   4. Evaluer le commutateur $[x,\ p_x]$
   5. En déduire les expressions des commutateurs $\left[x,\ p_x^n\right]$ et $\left[x^n,\ p_x\right]$
2. 1) Montrer que $e^{\alpha x}$ est une fonction propre relative à l'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dx}$ et en déduire sa valeur propre correspondante

   2) De même que $\exp(ikx)$ est une fonction propre de l'operateur quantité de mouvement p_x. Quelle est la valeur propre correspondante

Exercice 3 (6 points)

Dans un problème quantique à une dimension, on considère une particule de masse m se déplaçant dans le sens de croissance de x et soumise à la marche de potentiel.

$V(x) = 0$ pour $x < a$ et $V(x) = U$ pour $x > a$

Où U est une énergie potentielle constante positive et a est une valeur positive de cette particule.
On se donne un état stationnaire de cette particule d'énergie propre E > U décrit par la fonction d'onde $\Phi(x)$

1. Ecrire et résoudre l'équation de Schrodinger stationnaire dans chacune des régions I et II de l'espace définies par x < a et x >a. . On utilisera les notations : $k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $k_{II}^2 = \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$, Quelle est l'interprétation physique de k_I et k_{II}
2. a) Identifier chacun des termes de la solution
   b) Ecrire les conditions de raccordement au point x = a
   c) Evaluer les amplitudes des différentes ondes planes monochromatiques associées à cette particule en fonction de l'amplitude de l'onde incidente
3. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T. Conclure.

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 Mai 2022

Rattrapage d'algèbre IV (Durée : 3h) IKAPO

Exercice 1. (6pts)

Pour tout réel m, soit q_m la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par
$q_m(x,y,z) = mx^2 + 2(m+1)y^2 + (m+1)^2)z^2 + 2mxy + 2mxz - 4yz$.

1. Pour quelles valeurs de m la forme quadratique q_m est-elle non dégénérée ?
2. Déterminer la réduction de Gauss de q_m.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour tous les q_m.
4. Pour quelles valeurs de m la forme quadratique q_m est-elle définie positive ?

Exercice 2. (7pts)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $f \circ f^* = f^* \circ f$. Montrer que :
   (a) $||f^*(x)|| = ||f(x)||$ pour tout $x \in E$.
   (b) $\mathrm{Ker}(f) = \ker(f^*)$.
   (c) $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(f^*)$ et que $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) = \mathrm{Ker}(f^* - \lambda Id_E)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
   (d) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
2. On suppose que $\forall\, x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Montrer que $Im(f) = Ker(f)^{\perp}$.
3. On suppose que f conserve l'orthogonalité, c'est à dire $\forall\, x, y \in E$, $x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y)$.
   (a) Montrer que $||x|| = ||y|| \Longrightarrow ||f(x)|| = ||f(y)||$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel α positif tel que pour tout vecteur x de E, on a $||f(x)|| = \alpha||x||$.

Exercice 3. (5pts)

Soit H un espace hermitien de dimension n.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de H et P l'opérateur de projection orthogonale sur F. Montrer que P est hermitien positif.
2. Inversement, soit $P \in End(H)$ tel que $P^2 = P$ et $P^* = P$. Montrer que P est la projection orthogonale sur $Im(P)$.
3. Soit $P \in End(H)$ tel que $P^2 = P$. Montrer que P est la projection orthogonale sur $Im(P^*)$.

Exercice 4. (2pts)

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(X)Q(X)dX$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
Unité de Formation et de Recherche en Sciences et Technique (UFR/ST)
MPII, L2, S4

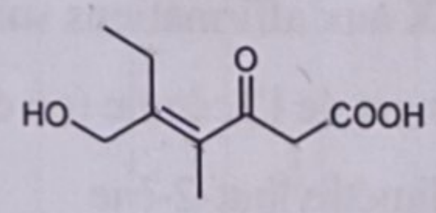
Année Universitaire 2021-2022
Date : Avril 2022
Durée : 1 H 30

IKAPO

Examen de Chimie organique

Exercice 1 (8 pts)

I- **Soit la molécule suivante :**



a) Le groupe prioritaire est la fonction cétone

b) La chaine carbonée de base comporte 7 atomes de carbone.

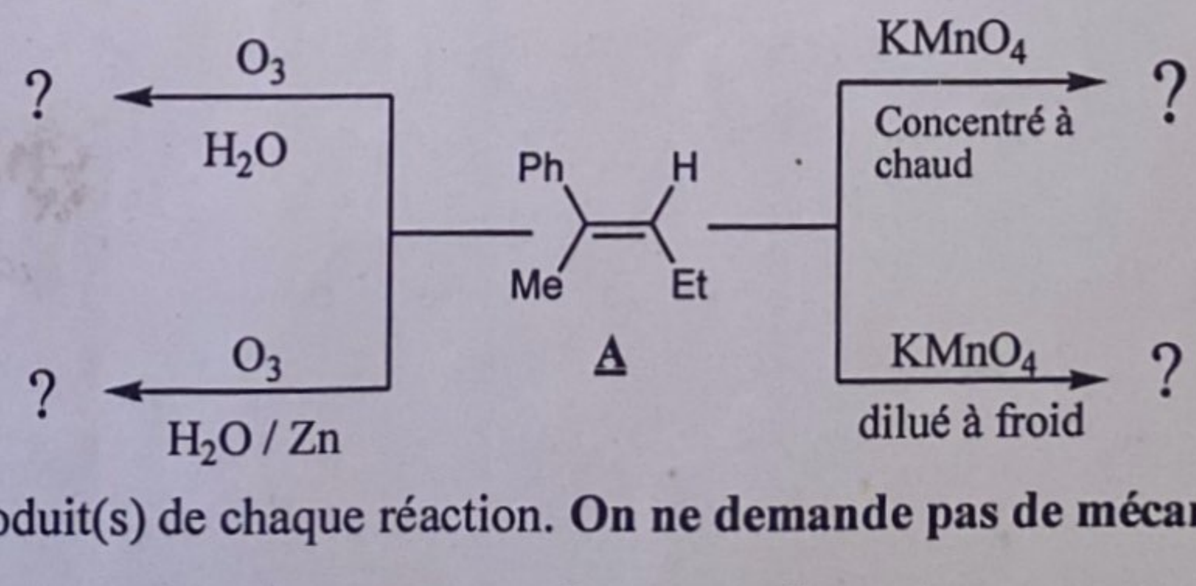
c) La chaine carbonée de base comporte deux (02) substituants alkyles

II- Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes :

1. La polarisation d'une liaison A-B est liée à la différence d'électronégativité entre les deux atomes A et B.
2. Dans la liaison C-Li, l'atome de carbone est porteur d'une charge δ+
3. Un nucléophile est nécessairement chargé négativement.
4. Les effets inductifs ne se communiquent qu'à travers des systèmes conjugués.
5. Un carbanion sera d'autant plus stable qu'il sera entouré de groupes exerçant un effet inductif donneur.

Exercice 2 (7 pts)

I- Le composé **A** subi plusieurs réactions d'oxydation ci-dessous, soit par l'ozonolyse soit en présence de $KMnO_4$:



I- Déterminer le(s) produit(s) de chaque réaction. **On ne demande pas de mécanisme.**

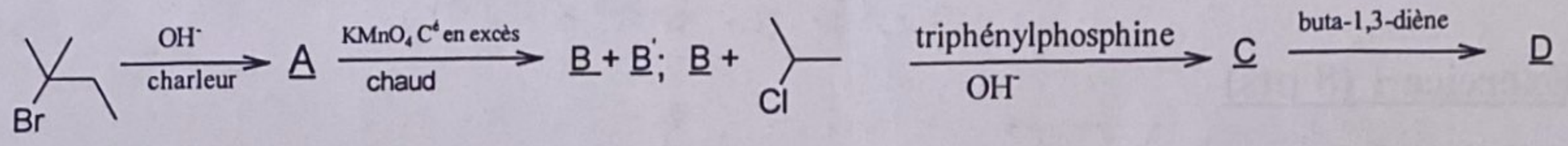
II- Parmi les espèces chimiques suivantes, quelles sont celles qui se comportent comme un nucléophile ? un électrophile ? les deux ? Ni l'un Ni l'autre ?

$CH_2=CH_2$; H_2O ; CH_3OH ; CH_3Li ; Li+ ; $(CH_3)_3C^+$; NH_3 ; BCl_3.

Scanned with CamScanner

Exercice 3 (5 pts)

Les composés **A**, **B**, **B'**, **C** et **D** sont les principaux produits obtenus dans la série de réactions suivantes :



1. Répondre par **VRAI** ou **FAUX** aux affirmations suivantes :
   a. Le composé **B** est exactement de l'acétone (on dit aussi propanone).
   b. Le composé **C** est le 2,2-diméthylbut-2-ène
   c. Le composé **A** est le 2-méthylbut-1-ène
   d. Le composé **B'** est le 2-méthylpropanal
   e. **D** est un composé cyclique

Fin

Dr S.SOSSO

Scanned with CamScanner

UFR/ SEA **Session de rattrapage d'Analyse 4** **MPI/L2**

Durée : 3h

Exercice 1

1. indiquer une série alternée divergente, dont le terme général tend vers 0.
2. Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\forall n\ |u_n| < |v_n|$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.
3. Soient f_n une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions gof_n converge uniformément.
4. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ décroissante telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 2

Soit $g : [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = g(x)e^{-nx}.$$

1. Étude de la suite de fonctions.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions.
   (b) Montrer que la suite de fonctions converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0,a]$ et pour tout $n > 1$.
   (d) En déduire que la suite de fonctions converge uniformément sur $[0,+\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0,+\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.
   (b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i. La courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine.
      ii. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par

$$f(x) = \cos(\alpha \arcsin x), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0.$$

2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Scanned with CamScanner

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions 2π périodique définies sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x \text{ si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

avec f paire et g impaire sur $\mathbb{R}^*$

1. (a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
   (b) Montrer que f est développable en série de Fourier.
   (c) Montrer que la série de Fourier, associé à f converge sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer les coefficients de Fourier de g.
   (b) g est-elle développable en série de Fourier ?

Bonne inspiration !!!

Scanned with CamScanner

Session de rattrapage d'électromagnétisme

Exercice 1 : On considère un solénoïde (dispositif composé d'un enroulement de N spires autour d'un cylindre de longueur L et de rayon R. Ces spires sont jointives et parcourues par le même courant I (figure 7.14). Soit Ox l'axe du solénoïde et M un point de cet axe repéré par deux angles θ1 et θ2 (figure 7.15). On note $n=N/L$ le nombre de spires par unité de longueur.

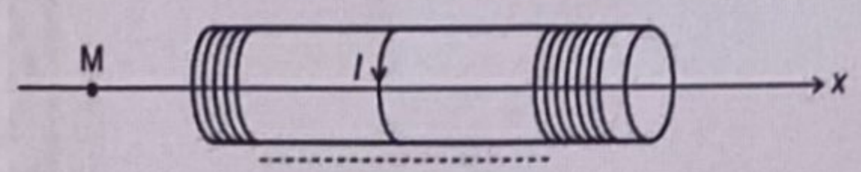


Figure 7.14

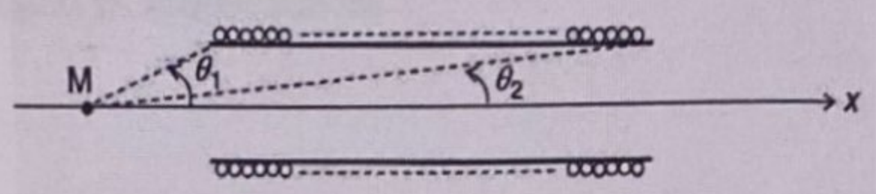
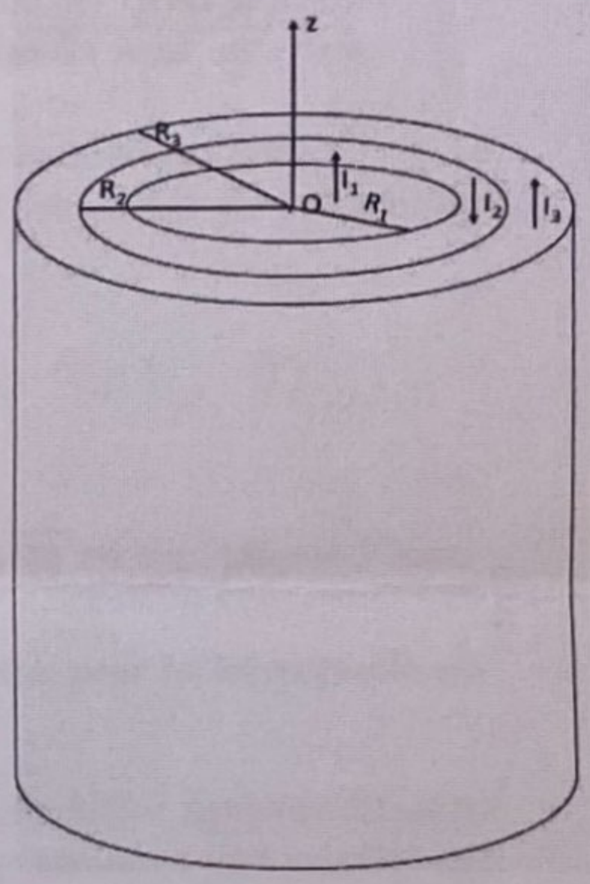


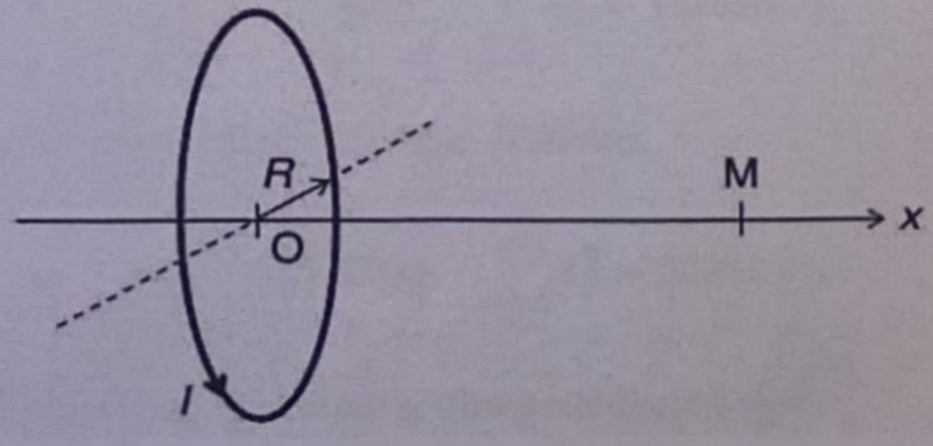
Figure 7.15

1. Calculer le champ magnétique créé par le solénoïde au point M.
2. En faisant tendre θ1 et θ2 vers deux valeurs limites appropriées, calculer le champ magnétique le long de l'axe d'un solénoïde infiniment long.

Exercice 2 : On considère fil métallique constitué de trois cylindres de même centre de rayons $R_1 = R$; $R_2 = 2R$ et $R_3 = 3R$ parcourus par trois courants constants $I_1 = I_3 = I$ et $I_2 = -I$. (Voir figure ci-contre). Calculer le vecteur champ magnétique en tout point M de l'espace situé au voisinage de cette distribution volumique de courant et tracer ses variations en fonction de la distance r qui sépare M de l'axe (Oz). On considérera d'abord la symétrie du système afin de déterminer la direction et le sens du champ magnétique, puis on calculera son expression respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur en utilisant le théorème d'Ampère.



Exercice 3 : Une spire circulaire de rayon R et de centre O est parcourue par un courant I constant (figure ci-contre). Soit Ox l'axe perpendiculaire à la spire passant par O. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(x)$ en tout point M d'abscisse x de cet axe. On démontrera au préalable que ce vecteur champ est parallèle à l'axe. Tracer les variations de $B(x)$ pour $-\infty < x < +\infty$.



Scanned with CamScanner

Etablissement : Université Nazi Boni/Centre Universitaire de Banfora(UNB/CUB)
Année Universitaire : $2022-2023$
Filière et Niveau : MATHS L_2S_4
Date et Durée : $18/10/2023; 2h30$
Enseignant : Dr BEYI Boukary

Devoir de Statistique Mathématique(Session de rattrapage)

Seule la calculatrice non programmable et la table des loi sont autorisées.

Exercice 1. *La loi Binomiale de paramètres n et p est symétrique pour $p = \frac{1}{2}$ et asymétrique pour les autres valeurs de p. Afin de faciliter les calculs des probabilités il est possible d'utiliser la formule suivante :*

$$P(X=k) = \frac{p}{1-p}\left(\frac{n-k+1}{k}\right)P(X=k-1), \quad k \geq 1 \qquad (\Gamma)$$

1. *Démontrer* (Γ). *(1pts)*
2. *Si* $X \rightsquigarrow \chi^2(n), n \in \mathbb{N}^*$ *alors montrer que* $\sigma_X = \sqrt{2n}$ *où* σ_X *désigne l'écart-type de* X. $(1.5pts)$
3. *Déterminer l'information statistique de la moyenne pour la loi normale généralisée.* $(1.5pts)$

Exercice 2. *On pose α et β deux nombres entiers de zumkeller compris respectivement entre* $]6, 12]$ *et* $[14, 24]$. ***On rappel qu'un entier strictement positif est de zumkeller si l'ensemble de ses diviseurs peuvent être partitionné en deux sous ensembles de même somme.***

Dans le but d'étudier l'influence éventuelle de la lumière sur la croissance du poisson du type "le biste réticulas" on a elevé deux lots de poissons dans des conditions d'éclairages différentes et on a obtenu les résultats suivants :

***Lot*$_1$** *: Nombre de poisson(180) éclairage à 700lux,*

$$\sum_{i=1}^{180} x_i = 5670; \quad \sum_{i=1}^{180} x_i^2 = 127325.25.$$

***Lot*$_2$** *: Nombre de poisson(90) éclairage à 400lux,*

$$\sum_{j=1}^{90} x_j = 362\alpha; \quad \sum_{i=1}^{90} x_j^2 = 31057.34\beta$$

La variable X représente la longueur des poissons en mm.

Scanned with CamScanner

1. *Au risque de 1% peut-on affirmer qu'il existe une différence significative entre ces longueurs ?*
2. *En se situant dans un contexte d'homoscédasticité, tester à 95% l'hypothèse selon laquelle "la lumière a une influence positive sur la croissance"*

Exercice 3. *1. a et b étant deux entiers naturels non nuls, on note d leurs PGCD et m leur PPCM. Déterminer tous les couples (a, b) vérifiant le système :*

$$\begin{cases} 11.75m + 41.125d = 652.125 \\ PGCD(a,b) = d \\ PPCM(a,b) = m \end{cases}$$

Calculer $E(a), E(a^2), cov(a,b)$

2. *Le tableau ci-dessous représente la repartition des revenus(exprimé en milliers de franc CFA) des habitants d'une region est étudié au moyen d'un échantillon de 100 ménages selon le tableau suivant :*

Revenus	[65; 85[	[85; 105[	[105; 125[	[125; 145[	[145; 165]
Nombre de ménages	*11*	*32*	*24*	*15*	*18*
P_i	0.11	0.32	0.24	0.15	0.18

L'hypothèse d'une repartition normale est-elle soutenable à un dégré de confiance de 95% ?.

Notons Bien : Lorsque la variance ou l'écart-type est négatif, prenez la valeur absolue.

"Ne laisse pas la paresse te faire croire que le devoir est dur ou compliqué. Seule la lutte libère!!!"

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 Septembre 2023

Rattrapage d'algèbre IV (Durée : 3h)

Exercice 1. (6pts)

Soit E un espace euclidien. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par
$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

1. Déterminer le rang et le noyau de q_a.
2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est diagonale de coefficients (1,-1,0).
3. Déterminer $(vect(e_1))^{\perp}$ pour q.
4. Existe t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est diagonale de coefficients (1,1,1) ?

Exercice 2. (6pts)

Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients réels.
Pour tout $P \in E_n$, on pose :

$$Q(P) = \int_0^1 P^2(t)dt.$$

1. Montrer que Q est une forme quadratique, définie positive. Ecrire la relation de Cauchy-Schawrz.
2. Calculer la matrice M de Q par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1, X, \cdots, X^n\}$ de E_n.
3. Montrer que la forme quadratique suivante sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie positive :

$$Q_1(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i + j + 1.}$$

Déduire son rang et sa signature.

Exercice 3. (8pts)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien de dimension finie, q une forme quadratique sur E et f la forme polaire associée à q. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $q(u(x)) = u(x)$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, on a $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$.
2. Soient $\mathcal{B}$ une base E, $M = Mat_q(\mathcal{B})$ et $A = Mat_u(\mathcal{B})$. Montrer que ${}^tAMA = M$.
3. Montrer que si q est non dégénérée, f est un automorphisme de E.
4. On suppose que f définit un produit scalaire.
   a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice B de u vérifie ${}^tBB = I$.
   b) Montrer que si un réel λ est valeur propre de u, alors $\lambda^2 = 1$.

Scanned with CamScanner

Université Nazi BONI
UFR SEA
MPI/S4
UEF : Mécanique quantique

année universitaire 2021-2022

(Session de rattrapage, durée : 3 heures, documents non autorisés)

Exercice 1 (4 points)

Une source lumineuse monochromatique de puissance P = 330 Watts et de fréquence $\nu = 10^{16}$ Hz éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique dont le potentiel d'extraction est $V_0 = 4{,}125$ Volts.

1. Calculer le nombre de photons émis par la source pendant une seconde.
2. Quel est le seuil en fréquence de la cellule ? Dire si l'effet photoélectrique a lieu. Pourquoi ?
3. Calculer la puissance correspondante au seuil en fréquence. Cette valeur représente-t-elle un seuil en puissance ? pourquoi ?
4. Evaluer l'énergie cinétique et l'impulsion de chacun des électrons expulsés de la cathode. On négligera toute perte d'énergie.
5. En déduire la longueur d'onde de De Broglie associé à ces électrons. Le traitement physique de l'un de ces électrons peut-il relever de la mécanique classique ?
6. On mesure la position de l'un de ces électrons avec une incertitude absolue $\Delta x = 1\text{A}$. Calculer l'incertitude absolue minimale sur la mesure de son impulsion. Conclure

Exercice 2 (6points)

On considère une particule libre de masse m que l'on décrit par le paquet d'onde (à une dimension) défini par :

$$\psi(x,t) = \int g(k_x) e^{i(k_x x - \omega t)} dk_x$$

1. Montrer que $\psi(x,t)$ vérifie l'équation de Schrodinger.
2. On suppose que $g(k_x)$ est une gaussienne centrée sur k_{x_0} :

$g(k_x) = \text{A}e^{\frac{(k_x - k_{x_0})^2 a^2}{4}}$ Avec $A = \dfrac{\sqrt{a}}{(2m)^{\frac{3}{4}}}$; a étant homogène à une distance.

a) Montrer que la probabilité de présence de la particule est indépendante du temps.

b) En utilisant la formule ci-dessus de $g(k_x)$, on obtient après intégration l'expression suivante pour $\psi(x,t)$ (à un facteur de phase près)

$$\psi(x,t) = \left[\frac{2a^2}{\pi\alpha(t)}\right]^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\varphi^2(x,t)}{Z(t)}\right]$$

avec $\alpha(t) = \text{a}^4 + \dfrac{4h^2}{m^2}t^2$; $\varphi(x,t) = \text{x} - \dfrac{hk_{x_0}}{m}t$ et $Z(t) = \text{a}^2 + \text{i}\dfrac{2h}{m}t$

i. Calculer la densité de probabilité
ii. En déduire la vitesse de groupe V_g

Exercice 3(10 points)

I. Soit les opérateurs linéaires A, B

Scanned with CamScanner

1. Démontrer que : $[A,\ BC] = [A,\ B]C + B[A,\ C]$
2. Généraliser en montrant que : $\left[A,\ B^n\right] = \sum_{k=0}^{n-1} B^k [A,B] B^{n-k-1}$
3. En utilisant la propriété d'antisymétrie, en déduire le commutateur $\left[A^n,\ B\right]$
4. Evaluer le commutateur $\left[x,\ p_x\right]$
5. En déduire les expressions des commutateurs $\left[x,\ p_x^n\right]$ et $\left[x^n,\ p_x\right]$.

II. Dans un problème quantique à une dimension, on considère une particule de masse m se déplaçant dans le sens de croissance de x et soumise à la marche de potentiel.

$V(x) = 0$ pour $x < a$ et $V(x) = U$ pour $x > a$

Où U est une énergie potentielle constante positive et a est une valeur positive de cette particule. On se donne un état stationnaire de cette particule d'énergie propre $E > U$ décrit par la fonction d'onde.

1. Ecrire et résoudre l'équation de Schrodinger stationnaire dans chacune des régions I et II de l'espace définies par $x < a$ et $x > a$. . On utilisera les notations : $k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $k_{II}^2 = \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$,
2. Quelle est l'interprétation physique de k_I et k_{II}
   a) Identifier chacun des termes de la solution
   b) Ecrire les conditions de raccordement au point $x = a$
   c) Evaluer les amplitudes des différentes ondes planes monochromatiques associées à cette particule en fonction de l'amplitude de l'onde incidente
3. Calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T. Conclure.

Scanned with CamScanner

UNB/ UFR-SEA/ MPI_2 Mai 2023

Devoir d'algèbre IV (Durée : 3h)

Exercice 1. (6pts)

Soit φ, la forme définie sur $\mathbb{R}_2[X]$, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, par $\varphi(P,Q) = P(1)Q(1) + P''(1)Q''(1)$ et q sa forme quadratique.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer sa matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On considère la famille $\mathcal{B} = \{1, 1-X, 2-X-X^2\}$
   (a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice B de φ dans $\mathcal{B}$.
   (c) En déduire une base $q-$orthogonale.
   (d) Déterminer dans $\mathcal{B}$, l'expression de φ et déduire la signature de q.
4. Déterminer le noyau de q et le cone isotrope de q. q est-elle non dégénérée ? définie ?
5. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = P'(0)\}$. Déterminer l'orthogonale de F relativement à φ.

Exercice 2. (6pts)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient $f_1, f_2, \cdots, f_p \in \mathcal{L}(E)$, des autoadjoints tels que $rg(f_1) + rg(f_2) + \cdots + rg(f_p) = n$ et $\forall x \in E, \sum_{i=1}^{p} < f_i(x), x > = < x, x >$.

Posons $g = \sum_{i=1}^{p} f_i - Id_E$.

1. Définir un espace euclidien.
2. Montrer que $g^* = -g$.
3. En déduire que $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = Id_E$.
4. Montrer que $E = Im(f_1) \bigoplus Im(f_2) \bigoplus \cdots \bigoplus Im(f_p)$.
5. Calculer $f_i \circ f_j$.
6. Montrer que si $i \neq j$, alors $Im(f_i)$ est orthogonale $Im(f_j)$.
7. En déduire que f_i est la projection orthogonale sur $Im(f_i)$.

Exercice 3. (8 pts)

Soit E un espace hermitien de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
Soit u un endomorphisme de E. On définit l'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$
par $f(x,y) = < u(x), u(y) >$, $\forall (x,y) \in E \times E$.

1. Montrer que f est une forme sesquilinéaire hermitienne.
2. Déterminer les noyaux de u et de f.
3. Soit A la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Quelle est la matrice de f en fonction de A dans $\mathcal{B}$?
4. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $rang({}^t\overline{A}.A) = rang(A)$.
5. Montrer que si u est inversible, la forme f est définie positive.
6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice hermitienne dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne H telle que $H^2 = M$ (Diagonaliser M à l'aide d'une matrice unitaire).
7. Démontrer que pour toute matrice A inversible, il existe une matrice hermitienne H telle que ${}^t\overline{A}.A = H^2$. Démontrer en plus que ${}^t\overline{A^{-1}}.H$ est unitaire.
8. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice inversible, alors il existe une matrice unitaire U et une matrice hermitienne H telles que $A = UH$.

Scanned with CamScanner